RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica solare. — *Relazioni tra i fenomeni solari.* Nota II del Socio A. Riccò (1).

La laureanda nella R. Università di Catania, Sig.na C. Petrucci, nel 1915 mi chiese un argomento di Astrofisica per la sua tesi di Laurea; io le consigliai di studiare le relazioni dei diversi fenomeni solari: macchie, facole, flocculi (2) e protuberanze mediante un lavoro di statistica, avendo per questo scopo l'Osservatorio di Catania un abbondante materiale, comprese le osservazioni dei flocculi, le quali furono cominciate da quando nel 1908 fu ivi messo in azione regolare e quotidiana lo spettreliografo (3), e continuata fino al 1915, dopo il quale anno queste osservazioni si dovettero interrompere per mancanza di personale, in conseguenza della guerra. Le altre nostre osservazioni solari, visuali, per la macchie, facole e protuberanze furono sempre continuate in Catania prima e dopo l'accennato periodo, per 29 anni, e se ne era già fatto lo spoglio e la statistica anno per anno.

Restava di fare il grave lavoro della misura delle fotografie dei flocculi, ottenute collo spettreliografo nei detti 8 anni, e ricavarne le posizioni, tenendo nota anche della intensità relativa di ciascun flocculo.

(1) Vedasi la Nota precedente: *Rendiconti*, 15 giugno 1913, pag. 815.

(2) Fu dato dal prof. Hale questo nome a certi fiocchi bianchi di luce del calcio che si ottengono collo spettreliografo.

(3) *Rendiconti*, 22 settembre 1908, pag. 529.

Colla mia guida la Sig.na Petrucci nel 1916 si accinse a queste misure, determinando di ogni flocculo fotografato l'angolo di posizione e la distanza dall'orlo solare; eseguì le necessarie calcolazioni per passare alle latitudini eliografiche, e quindi fece i confronti e le statistiche.

Per rendere comparabili le statistiche delle osservazioni fotografiche dei flocculi con quelle delle osservazioni visuali delle facole, che ordinariamente sono visibili soltanto a non grande distanza dall'orlo solare, si stabilì di considerare soltanto quei flocculi la cui immagine fotografica era lontana dall'orlo solare non più di 3/10 del semidiametro dell'astro. Le fotografie misurate sono 1273 ed i flocculi rilevati sono 1670 (escluse le ripetizioni nelle fotografie di uno stesso giorno).

Si deve dire che nel 1913 si offuscò lo specchietto dello spettreliografo, e che per farlo riargentare dal costruttore passò parecchio tempo; inoltre il 1913 era anno di minimo della attività solare, e quindi le facole ed i flocculi erano pochissimi; infatti nell'Osservatorio di Catania si osservò soltanto una facola ogni 5 giorni, in media. Nell'Osservatorio di Madrid si registrò collo spettreliografo soltanto 2 flocculi ogni 3 giorni, in media (1); e pertanto il confronto tra le facole ed i flocculi e con altri fenomeni solari, pure scarsi, non avrebbe potuto dare risultati sicuri; e così si decise di non occuparci dei fenomeni solari del 1913; il che non poteva influire sul risultato dei confronti.

Questo lavoro, lungo già per se stesso, fu prolungato maggiormente da circostanze di famiglia della Sig.na Petrucci, le quali le impedirono di dedicarvisi colla desiderabile assiduità.

Intanto nel fascicolo di aprile 1917 dello *Astrophysical Journal* comparve un articolo che riassumeva un analogo lavoro statistico fatto dal signor Lee all'Osservatorio Yerkes presso Chicago, fondato però esclusivamente sopra osservazioni spettreliografiche, e che pertanto tratta delle relazioni delle protuberanze colle macchie e coi flocculi, i quali implicitamente Lee considera come corrispondenti alle facole; ed in conclusione nega l'idea che esista fra le protuberanze e le macchie ed i flocculi una stretta relazione, idea questa che egli chiama *ereditata*, vale a dire accettata, senza la dovuta discussione, cioè senza benefizio d'inventario.

La detta conclusione di Lee ci persuase non essere più opportuno di spender tempo e lavoro per dimostrarla di nuovo, e le indagini nostre furono limitate specialmente alla relazione tra i flocculi e le facole, che si osservano visualmente o con fotografie dirette; poichè la stretta relazione delle facole e dei flocculi colle macchie, che le une e gli altri accompagnano e circondano ordinariamente, è evidente ed ammessa da tutti.

Considerando il risultato complessivo della statistica dei 7 anni 1908-1915 (escluso il 1913) si ha che si sono osservate 1321 facole e 1670 floc-

(1) *Annuario del Observatorio de Madrid* para 1918.

culi, e che 942 facole, cioè quasi 3/4 di esse, corrispondono ad altrettanti flocculi. Non è da aspettarsi qui una completa coincidenza, cioè di tutte le facole con tutti i flocculi, per diverse ragioni:

1). L'ora della osservazione visuale delle facole e della spettreliografia per i flocculi raramente poteva essere precisamente la stessa, ed è noto che questi fenomeni sono mutabili col tempo.

2). La scelta del punto che si considera come centro delle facole e dei flocculi presenta spesso della incertezza.

3). Le facole sono osservate sulla superficie lucidissima, quasi abbagliante, della fotosfera solare; i flocculi sono fotografati collo spettreliografo nella luce semplice dei vapori del calcio che prevale su quella generale della fotosfera, indebolita dalla dispersione.

Dietro queste considerazioni è evidente che la visibilità ad occhio delle facole dev'essere, generalmente, minore di quella dei flocculi ottenuti con lo spettreliografo, e ciò può essere una ragione che spiega perchè il numero delle facole osservate è per lo più minore di quello dei flocculi.

E invero la statistica dimostra che il numero delle coincidenze delle facole coi flocculi aumenta per le facole più vive; si ha infatti:

1). Facole deboli	coincidenti	175 su 306	cioè	57 %
2). Facole mediocri	»	619 su 831	»	75 %
3). Facole vive	»	155 su 184	»	84 %

Un altro modo di indagare se vi sia relazione tra le facole ed i flocculi consiste nel vedere quali sieno le rispettive latitudini eliografiche medie.

Nella seguente Tabella I sono date le latitudini medie di tutte le facole e di tutti i flocculi osservati per ciascuno degli anni dal 1908 al 1915 e per il loro complesso, separatamente in ciascun emisfero e nell'insieme dei due.

Si vede che i valori per i due fenomeni sono assai vicini e che il loro andamento è affatto analogo.

Nella Tabella stessa si sono aggiunte anche le latitudini eliografiche medie delle protuberanze, le quali invece hanno valori affatto diversi, cioè tutti molto più alti, di circa 17°.

Infine un altro modo ancora di vedere la relazione esistente tra facole e flocculi, è quello di studiarne la distribuzione in latitudine sulla superficie del sole. Nella Tabella II è fatta in zone di 5° di latitudine per i singoli anni ed anche per lo insieme del periodo 1908-1915.

Si vede subito la grande analogia della distribuzione dei due fenomeni; poichè presso a poco anche nei singoli anni, i massimi hanno luogo nelle stesse zone; ciò poi si verifica molto approssimativamente nell'insieme dei 7 anni considerati; anche l'estensione dei due fenomeni nelle regioni polari è poco diversa, essendo però alquanto maggiore per i flocculi.

TABELLA I.

ANNI	Facole osservate (tutte) Latitudini medie			Flocculi osservati (tutti) Latitudini medie			Protuberanze osservate (tutte) Latitudini medie		
	B	A	$\frac{1}{2}$ (B + A)	B	A	$\frac{1}{2}$ (B + A)	B	A	$\frac{1}{2}$ (B + A)
1908	11.4	16.7	14.0	13.6	17.7	15.6	26.4	28.7	27.5
1909	11.6	14.4	13.0	12.2	14.1	13.1	31.9	27.5	29.7
1910	12.5	13.8	13.1	10.2	13.4	11.8	30.3	28.3	29.3
1911	8.6	15.1	11.8	9.6	11.9	10.7	31.9	33.8	32.8
1912	10.0	10.8	10.4	(*)	10.4	10.4	38.7	37.0	37.8
1913	30.2	21.2	25.7				39.0	40.4	39.7
1914	28.0	28.9	28.4	28.1	32.6	30.3	39.0	41.0	40.0
1915	27.3	23.0	25.1	26.3	24.8	25.5	38.9	38.4	38.6
Medie 1908-915 (escluso il 1913).	15.6	17.5	16.5	16.7	17.8	17.3	33.8	33.5	33.6

(*) Vi sono soltanto due flocculi osservati; perciò non si dà la media.

Tabella II. — *Distribuzione in latitudine eliografica.*

Latitudini eliografiche			Facole							Floccul							Protuberanze								Facole	Floccul	Protuberanze
			1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1908-1915 (escluso il 1913)		
Boreali	85	a	89	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	—	1	—	—	—		—	—	—	1	1
	80	»	84	—	—	—	—	—		—	1	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	1		—	—	—	—	1
	75	»	79	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	2	—	—		—	—	—	3	2
	70	»	74	—	—	—	—	—		—	1	—	—	—	—		1	1	—	—	—	—	—		—	—	1	3	2
	65	»	69	—	—	—	—	—		1	2	—	—	—	—		—	—	—	2	—	—	—		—	—	—	—	2
	60	»	64	—	—	—	—	—		—	1	—	—	—	—		—	—	2	3	—	—	1		1	5	—	1	12
	55	»	59	—	—	—	—	—		—	1	—	—	—	—		—	—	5	5	10	2	—		1	35	—	1	58
	50	»	54	—	—	—	—	—		—	6	—	—	—	1		—	—	20	24	21	2	5		11	87	—	7	170
	45	»	49	—	—	—	—	—		1	1	—	—	1	—		—	—	16	44	18	4	12		54	92	1	2	240
	40	»	44	—	—	1	—	—		2	—	2	—	—	—		—	—	7	32	9	8	7		54	47	2	2	164
	35	»	39	1	—	—	—	—		2	2	—	—	—	—		1	2	15	12	13	6	14		35	43	4	5	148
	30	»	34	3	2	1	—	—		3	3	1	—	—	—		2	3	20	13	8	5	9		22	65	6	9	142
	25	»	29	—	2	3	—	—		6	2	3	—	—	—		6	5	24	30	23	7	2		35	89	21	16	210
	20	»	24	11	12	7	2	—		9	3	9	2	—	—		2	18	35	48	33	7	1		18	73	20	34	215
	15	»	19	29	46	15	4	1		21	9	16	3	2	—		2	18	26	27	31	9	3		12	53	62	50	161
	10	»	14	60	66	19	3	1		4	41	42	9	1	—		3	9	32	27	23	6	1		13	42	104	105	144
	5	»	9	52	46	30	6	—		1	91	76	24	6	1		2	—	39	18	17	5	3		14	18	151	200	114
	0	»	4	16	25	6	8	—		1	68	56	26	11	—		1	—	27	20	21	3	4		3	15	134	162	93
											40	32	11	8	1		—	—	26	27	11	2	3		4	13	56	92	86
Australi	0	a	4	18	25	10	6	1		1	25	36	11	4	1		—	—	26	14	12	9	1		7	—	53	77	69
	5	»	9	27	53	38	5	10		—	53	62	36	10	8		1	1	31	28	24	12	8		12	15	133	171	130
	10	»	14	41	53	42	10	8		—	61	58	46	10	10		—	—	32	36	21	14	6		3	22	154	185	134
	15	»	19	60	78	41	8	3		8	82	82	54	7	3		—	6	47	28	25	12	15		8	33	200	234	168
	20	»	24	49	34	18	3	1		12	75	55	15	2	1		—	17	45	28	19	13	12		16	48	120	165	181
	25	»	29	28	15	8	—	—		9	46	15	5	3	—		6	4	60	41	22	15	14		15	50	66	79	217
	30	»	34	8	6	1	—	—		3	22	3	—	—	—		1	6	41	37	21	29	10		25	63	19	33	226
	35	»	39	4	2	—	—	—		—	7	3	—	—	—		2	1	30	42	17	31	11		35	47	7	13	213
	40	»	44	—	1	1	—	—		—	5	1	—	—	—		2	—	26	34	22	31	18		63	37	4	8	231
	45	»	49	—	—	—	—	—		—	—	1	—	—	—		1	—	15	19	28	38	29		78	61	—	2	263
	50	»	54	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		1	—	25	8	46	21	29		56	96	1	2	284
	55	»	59	—	1	—	—	—		1	2	—	—	—	—		1	—	17	4	18	3	9		22	73	1	1	146
	60	»	64	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	10	6	—	1	3		—	19	—	—	39
	65	»	69	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	1	2	—	1	—		4	5	—	—	13
	70	»	74	—	—	—	—	1		—	—	—	—	—	—		—	1	—	1	—	—	1		2	2	1	1	6
	75	»	79	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	4	—	—	—	—		1	1	—	—	6
	80	»	84	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	1	—		2	1	—	—	4
	85	»	89	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—		—	—	1	—	—	—	—		1	1	1	—	3

Nella Tabella II si è messa pure la distribuzione delle protuberanze solari; fatta allo stesso modo. Si nota a colpo d'occhio la grande differenza di portamento di questo terzo fenomeno, rispetto agli altri due.

Dunque dal lavoro statistico della Sig.na Petrucci risulta che in generale le facole ed i flocculi si formano negli stessi tempi e negli stessi luoghi della superficie solare, cioè colla stessa legge, e quindi si possono ritenere come manifestazione di uno stesso fenomeno solare.

E si può anche aggiungere che risulta confermata l'inesistenza di relazione intima delle facole e dei flocculi colle protuberanze solari.

Però la variazione di frequenza con periodo undecennale, è comune a tutti i fenomeni della attività solare, e quindi anche alle facole, flocculi e protuberanze.

Queste conclusioni concordano con quelle ottenute quasi simultaneamente all'Osservatorio Yerkes ed all'Osservatorio di Stonyhurst.

A queste conclusioni credo opportuno far seguire alcune mie considerazioni che possono servire a completare il concetto della vera relazione tra facole e flocculi, oltre quella della loro contemporaneità ed identica posizione sul sole; poichè è naturale pensare o che ciò possa dipendere dall'essere questi due fenomeni simultanei i quali si sovrappongono, o che piuttosto (come riteniamo) si tratti dello stesso unico fenomeno, osservato in modi diversi; cioè le facole nella loro luce naturale bianca, completa, nella quale l'occhio ha la massima sensibilità per il giallo, od in generale per le onde luminose lunghe; mentre invece i flocculi sono rilevati colla fotografia spettreliografica nella luce violetta, semplice della riga *H* o *K* del Calcio, la quale ha una forte azione sull'emulsione fotografica, debole invece sull'occhio umano.

Poichè, secondo risultò a Deslandres col suo *spettrografo delle velocità* anche prima dell'invenzione dello spettreliografo, nei flocculi (come nelle facole) abbondano singolarmente i vapori di calcio ad altissima temperatura, si spiega in modo semplice perchè le facole appariscono di più nelle fotografie che nelle osservazioni visuali, per le quali la sovrabbondanza di luce violetta ha poco effetto, mentre invece l'ha grande nelle eliografie.

Per spiegare poi il maggiore contrasto ed estensione, ed anche il maggiore numero dei flocculi, vi è in più da considerare che nella osservazione visuale delle facole sul fondo costituito dalla fotosfera, la luce delle righe violette del calcio è mitigata dall'assorbimento indicato dai larghi orli oscuri che accompagnano le righe lucide centrali; mentre nelle fotografie dei flocculi, fatta collo spettreliografo, si utilizzano soltanto le righe lucide centrali del calcio più vive nelle facole, e si escludono gli orli oscuri; il che anche esclude la loro luce diffusa, e contribuisce pure ad aumentare così il contrasto.

Si può anche aggiungere che secondo la legge psico-fisica di Fechner, per produrre una data differenza nella sensazione luminosa, ossia un dato

contrasto, la differenza nella intensità della luce deve essere proporzionale alla intensità stessa, ossia a quella del fondo; quindi dev'essere maggiore nella osservazione visuale delle facole, minore nella osservazione dei flocculi mediante lo spettreliografo (1).

Che l'estensione ed il contrasto delle facole dipenda dal modo d'osservazione è provato anche dalla differenza di risultato che si ha secondo che la seconda fessura dello spettreliografo è applicata in modo da ricevere l'una o l'altra parte delle complicate righe del calcio *H* o *K*, cioè la sfumatura laterale, o la riga lucida centrale, od anche la riga oscura che divide in due la predetta lucida. Anzi adoperando collo spettreliografo le righe oscure dell'idrogeno si ottengono generalmente immagini oscure dei flocculi, ossia delle facole.

Insomma la visibilità, l'estensione, l'intensità luminosa delle immagini delle facole dipendono dalla qualità della luce che è impiegata a formarle, ciò che del resto ha luogo generalmente per tutte le immagini ottiche.

Dunque non vi è da farsi caso se nella precedente statistica le facole risultano di numero inferiore a quello dei flocculi, ed aggiungiamo, se Deslandres ed altri hanno riconosciuto che le facole sono meno estese dei flocculi.

Del resto si ha una ulteriore prova della identità delle facole e dei flocculi nei tre fatti seguenti:

1). Che il numero delle coincidenze delle facole e dei flocculi cresce al crescere della loro intensità.

2). Che le latitudini medie dei flocculi, per i quali nelle nostre osservazioni visuali non si trovarono facole corrispondenti, sono presso a poco eguali alle latitudini medie delle facole e variano allo stesso modo nei varii anni (Tabella III).

3). Fényi (2) ha trovato che nelle facole vi è moto discendente, Deslandres ha dimostrato che nei flocculi del calcio vi è pure moto discendente.

Quanto alle protuberanze ed alla loro relazione colle macchie, da un pezzo è abbandonata l'antica idea che queste siano come crateri e che le protuberanze sieno fiamme eruttate da essi, e l'altra che le protuberanze salendo in alto si raffreddino, ed i materiali oscuri che ne derivano formino le macchie. Invece attualmente si ritengono le macchie dei cicloni che aspirano i gas e vapori delle regioni sovrastanti dell'atmosfera solare; cosicchè collo spettreliografo il prof. Hale ha potuto perfino sorprendere e fotografare un flocculo mentre veniva come inghiottito nel nucleo di una macchia.

(1) Questo potrebbe forse bastare, certo contribuisce, insieme alla loro altezza, a spiegare perchè le facole nelle osservazioni visuali si vedono meglio presso l'orlo del sole ove la luce del disco è minore.

(2) *Astr. Nach.* Vol. 140, pag. 300.

TABELLA III.

ANNI	Flocculi corrispondenti a facole Latitudini medie			Flocculi non corrisp. a facole Latitudini medie		
	B	A	$\frac{1}{2}(B+A)$	B	A	$\frac{1}{2}(B+A)$
1908	10°9	17°3	14°1	9°.7	18°.0	13°.8
1909	10.7	14.0	12.3	14.5	14.3	14.4
1910	11.2	13.4	12.3	9.3	13.3	11.3
1911	8.2	11.7	10.0	11.7	12.1	11.9
1912	(1)	9.4	9.4	(2)	13.1	13.1
1913	—	—	—	—	—	—
1914	22.5	32.8	27.6	30.8	32.4	31.6
1915	25.2	23.0	24.1	29.5	27.7	28.6
Medie 1908-1915 escluso il 1913 .	14.7	17.3	16.0	17.6	18.7	18.1

Respighi, Wolfer, la Sig.ra Evershed ed altri hanno poi dimostrato che talvolta delle protuberanze, specialmente eruttive, appariscono attorno alle macchie, ma non su di esse; inoltre si sa che generalmente le protuberanze spuntano a tutte le latitudini solari, anche fuori della zona ristretta delle macchie, e perfino nelle regioni polari del sole; talchè bisogna concludere che non vi è intima relazione fra queste due classi di fenomeni solari, come appunto è risultato anche dalla statistica di Lee.

Essendo poi nota, anzi evidente, l'intima relazione delle facole colle macchie, ed essendo ammesso da molti e dimostrato dai lavori degli Osservatorii di Stonyhurst e di Catania che i flocculi corrispondono alle facole, risulta per conseguenza l'intima relazione anche dei flocculi colle macchie; il che del resto è evidentissimo nelle fotografie date dallo spettreliografo.

Ed essendo già stata sostenuta da Respighi nel 1875 e dimostrata esaurientemente fin dal 1908 da Mascari, allora assistente all'Osservatorio di Catania, la mancanza di relazione intima fra le protuberanze e le facole, ed essendo ora dimostrato che queste corrispondono ai flocculi, risulta anche così l'inesistenza di una stretta connessione tra essi flocculi e le protuberanze solari.

Ripetiamo però che tutti i fenomeni dell'attività solare seguono il ciclo undecennale della frequenza, stabilito primieramente per le macchie. Non

(1) Non si sono osservati flocculi corrispondenti a facole.

(2) Non si sono osservati flocculi non corrispondenti a facole.

solo, ma altresì notiamo che durante il ciclo undecennale le sedi di questi fenomeni nella superficie del sole si spostano simultaneamente ed analogamente, come io ho dimostrato nelle mie osservazioni aver avute luogo dal 1879 in poi per le latitudini medie annuali delle macchie e per quelle delle protuberanze; le quali medie hanno andamento pressochè parallelo: le macchie nelle loro zone, le protuberanze a latitudini più alte per 15° a 20°; con i più bassi valori, prima del minimo di frequenza e coi valori più alti dopo il detto minimo (1). Ciò può vedersi anche nella Tabella I.

Siccome poi i flocculi e le facole accompagnano le macchie, anche per questi due fenomeni esiste tale oscillazione delle loro latitudini medie annuali.

Botanica. — *Considerazioni sulla convenienza dell'impiego del legno in specie nella costruzione dei « lungheroni d'ala » degli aeroplani.* Nota del Socio Oreste Mattirolo.

Negli ultimi periodi della nostra guerra, mentre si andava febbrilmente intensificando la produzione di apparecchi di volo, io ebbi l'onore di essere ripetutamente richiesto dalla *Sezione tecnica di aviazione*, risiedente in Torino, di alcuni pareri di indole xilologica; di riconoscimento cioè di legnami; di studii sulle condizioni loro; di perizie su legni impiegati nella costruzione dei *lungheroni d'ala e di fusoliera*, schiantatisi quest'ultimi per effetto di cadute (*capottamenti*) o rottisi in volo, ecc.

Durante queste ricerche mi avvenne di poter osservare alcuni casi che, a parer mio, possono interessare non solo i tecnici dell'aviazione, ma anche i botanici; epperò su di essi intendo brevemente interessare la loro attenzione, perchè i fatti da me osservati tenderebbero a consigliare la esclusione dell'elemeno legnoso dalla costruzione delle parti vitali degli aeroplani, e l'adozione di materiale metallico più omogeneo, quantunque, sotto il punto di vista del rapporto della resistenza al peso, alquanto meno vantaggioso.

Gli inconvenienti gravissimi, che furono causa della morte di non pochi aviatori, dimostrano che un attento esame tecnico dell'importante argomento si impone; e che è necessaria l'adozione di prove di resistenza dei legnami da impiegarsi (massimamente nella costruzione dei *lungheroni d'ala*), le quali dovranno essere condotte con criterii differenti da quelli finora impiegati.

Infatti, le prove regolamentari di resistenza in uso presso gli Uffici tecnici, saggiano la *resistenza globale* del legno, senza preoccuparsi delle dif-

(1) *Atti dell'Acc. Gioenia.* Vol. IV, Serie 4ª, 1891. In una mia Nota, ora in preparazione, ciò è confermato fino al 1917.

ferenze anatomiche che ogni legno presenta negli strati di cui è composto; ciò che può essere cagione di disastri, quando gli sforzi a cui il legno può essere assoggettato (durante il volo, o per effetto della caduta), si esercitino in modo irregolare, in certe direzioni piuttosto che in altre.

È cosa notissima, che la massa di qualunque legno è formata da strati più o meno concentrici; e che i singoli strati formatisi durante i varii periodi di vegetazione non sono omogeneamente costituiti.

Il legno cosidetto *di primavera* o *primaticcio*, infatti, è essenzialmente differente dal legno di *estate* o *tardivo*. Mentre il primo è composto di elementi a grandi diametri, aventi membrane generalmente sottili, debolmente colorate, imperfettamente lignificate, ecc., il secondo è invece più compatto, più uniforme, composto di elementi con diametri molto minori, membrane robuste, perfettamente lignificate ecc., intensamente colorate, così che anche macroscopicamente le differenze fra i due tipi di elementi sono evidentissime.

Quando la vegetazione procede in modo normale, è legge che ogni cerchio (comprendente tanto il legno di primavera, quanto quello di estate) corrisponda ad un periodo formativo della durata generalmente di un anno (1) e che il maggiore o minore spessore di ogni cerchio risponda alla maggiore o minore attività funzionale della pianta nel corrispondente periodo.

Ma in pratica, la regolarità del fenomeno purtroppo molte volte si oscura e occorre occhio sperimentato ed esperto per portare un giudizio esatto, semprequando si considerino le condizioni tutte, che in un modo o nell'altro, possono avere influito sul lavoro della *zona generatrice* o *cambiale*.

Condizioni di secchezza infatti, di umidità soverchia, di malattie; ineguaglianza nelle condizioni di nutrizione e di assimilazione, ecc., sono cause di differenze, talora notevolissime, nella costruzione dei relativi cerchi annuali; così come lo sono pure le condizioni di radicazione della pianta, la direzione cioè delle radici e quella conseguente dei rami; l'orientazione dell'albero, l'illuminazione di esso, ecc. ecc.

Influenza preponderante sulla netta delimitazione dei cerchi legnosi è esercitata fondamentalmente dalle condizioni di clima.

Negli alberi che perdono d'inverno le foglie (fatta eccezione della accidentale formazione di cerchi supplementari, in dipendenza delle riprese di vegetazione che si osservano qualche volta in agosto nel nostro clima, e delle riprese primaverili (2), per effetto dei parassiti, dei bruchi, dei maggiolini, ecc.), le zone legnose annuali sono per lo più nettamente differenziate.

(1) È noto come alcuni alberi (*Araucaria excelsa* Ait., ad es.) impieghino due anni a dare origine ad un cerchio legnoso.

(2) Le ricerche di molti autori, e specialmente quelle del Guignard, dimostrano la erroneità del metodo volgare di calcolare l'età di un albero dalla semplice enumerazione delle zone legnose. È frequente il fatto di alberi e arbusti che formano in un anno due zone legnose. È noto come le *Quercie* gli *Olmi*, i *Frassini*, ecc. (quasi regolarmente nei

Non così avviene nei vegetali che si sviluppano nei climi tropicali o subtropicali, nei quali le variazioni di struttura degli elementi legnosi e la delimitazione dei cerchi legnosi, non stanno più in diretta dipendenza delle stagioni, ma sono invece in relazione col periodo delle pioggie, il quale naturalmente non può esercitare una influenza sempre costante.

Nei paesi poi, a clima più o meno nettamente mediterraneo-meridionale, essendo le influenze delle stagioni attenuate e quelle derivanti dai periodi delle pioggie irregolari, ne risulta che la struttura e la successione dei cerchi, presenta dei caratteri intermedii tra quelli che si osservano nei rami o nei tronchi delle piante a foglie caduche e quelli delle piante tropicali.

Aggiungasi che per molte cause (intorno alle quali non mi pare sia qui il caso di insistere) anche i due strati (*primaverile* ed *estivo*) dei cerchi annuali legnosi, possono subire non lievi modificazioni nelle qualità intrinseche e nella struttura degli elementi che li costituiscono, così che la loro costituzione rimane alterata e riesce anormale.

Dalle considerazioni succintamente esposte, ne viene la conseguenza che i cerchi legnosi non hanno mai la stessa resistenza in ogni loro punto e che quindi il legno di ogni albero non può mai essere considerato come un tutto omogeneamente costituito e che quindi le prove di resistenza di un legno dovrebbero tener calcolo di questi fatti e saggiare la resistenza tanto degli elementi legnosi più tenaci, quanto di quelli che lo sono assai meno (1), ciò che, con mezzi adatti di esperimento non dovrebbe essere difficile, adottando convenienti dispositivi, prove di scorrimento sugli strati di minore resistenza, ecc.

I casi da me osservati, consigliano questo prudente metodo di valutazione, perchè dimostrano, come in particolari contingenze, lo sforzo possa

nostri paesi ogni 3-5 o 6 anni siano invasi dai bruchi, dai maggiolini, dalle cantaridi, ecc., che ne mangiano le foglie primaverili e che per conseguenza negli anni di invasione sviluppano due zone concentriche legnose anormali per effetto di una seconda vegetazione molto vigorosa.

Sfogliando alberi di: *Æsculus*, di *Corylus*, di *Sorbus*, di *Populus*, di *Betula*, di *Tilia*, ecc., il *Kühns* è riuscito sperimentalmente a raddoppiare le zone legnose annuali (normalmente uniche) e a far produrre nel legno zone anormali di elementi sottili, teneri, poco lignificati, la cui origine è certo da ascriversi alla mancanza di nutrimento. Le ineguaglianze di spessore degli strati annuali e la conseguente eccentricità del loro sviluppo, sperimentalmente studiate da Hofmeister, da Unger, Kononczuk, Wiesner, ecc., avevano già colpita l'attenzione di Leonardo!

(1) Nel caso di legname artificialmente *stagionato*, queste prove acquisteranno maggiore importanza; data l'ignoranza in cui ci troviamo per giudicare dell'effetto dei trattamenti industriali di stagionatura, i quali possono notevolmente influenzare le proprietà di resistenza dei varii elementi del legni e specialmente di quelli più idratati, quali appunto sono quelli primaticci o primaverili. Anche la *stagione* nella quale fu tagliato il legname può avere influenze notevoli sulla resistenza degli elementi legnosi.

essere diretto per intero sopra il materiale meno resistente del legno e cagionare disastri che si sarebbero potuti prevedere ed evitare, qualora si fosse posto mente alle considerazioni suesposte, e non si fosse calcolata la resistenza del materiale col solo *metodo globale*.

I casi osservati mi paiono più che sufficienti a dimostrare indiscutibilmente la ragionevolezza di queste mie osservazioni.

1) Nell'aerodromo militare di Cambiano (Torino), in due apparecchi (P. 13840 — P. 13776) e nell'aeroplano P. tipo E. (di matricola militare n. 13758), tutti e tre capottati, mi fu dato osservare sulla superficie di rottura dei *lungheroni di fusoliera*, una specie di materiale pulverulento, facilmente staccabile sotto forma di granuli duri, resistenti, il quale all'esame microscopico, sussidiato dagli opportuni reagenti, si è dimostrato composto, *per intero*, dagli elementi caratteristici del legno primaverile (*trachee — tracheidi — fibre di vario tipo — parenchimi*).

Lo sforzo subìto nel momento nel quale gli apparecchi urtarono violentemente il suolo, aveva provocato il distacco completo e lo *scorrimento* successivo di tutta la zona primaverile di uno dei cerchi annuali, il quale si era ridotto a quel modo! Notisi che in questi casi si trattava di lungheroni fabbricati con pezzi di Frassino (*Fraxinus excelsior* Linn.) dicotiledonea fornita prevalentemente di grossi elementi tracheali primaverili.

Gli ufficiali aviatori del campo mi assicurarono che, senza conoscerne le ragioni, avevano notato già molte volte il fenomeno in casi di capottamento degli apparecchi.

2) Un pezzo di *lungherone d'ala* di un apparecchio (SVA) rottosi in volo, mi fu *ufficialmente* comunicato per esame, perchè io analizzassi e riferissi sopra un singolare fenomeno che presentava la superficie di rottura, sulla quale si osservava, *ad occhio nudo*, una specie di lanuggine, *che per il passato* (come diceva la lettera di accompagnamento del pezzo) *non si era mai prima osservato, nè nelle esperienze di Laboratorio, nè in incidenti di volo, e che aveva fatto nascere il dubbio fosse dovuto ad una speciale malattia del legno*.

Ora, anche in questo caso (che causò la morte di due aviatori!) il fenomeno all'analisi microscopica si dimostrò di identica natura di quelli da me precedentemente osservati.

Lo sforzo che produsse la rottura del *lungherone* aveva disgiunto, sfibrillato le tracheidi, le fibre, i parenchimi primaverili del legno, riducendoli in quello stato lanuginoso che aveva fatto credere alla presenza di filamenti micelici di un fungo parassita.

In questo caso, giova avvertire, che si trattava di una Conifera e non di una Dicotiledone. La Conifera non era certamente la *Pseudotsuga Douglasii* Carr. (che i tecnici nostri indicano erroneamente col nome generico di *Spruce*); ma una specie di *Pinus* americano, che non fu determinato.

Questi pochi casi, i soli che io ho potuto esaminare, mi paiono però tali da dover essere presi in seria e attenta considerazione, così che ho creduto mio stretto dovere di portarli a conoscenza dei tecnici e dei botanici; dei tecnici, perchè pensino a rimediare alla possibilità che si abbiano a ripetere; e dei botanici perchè sieno edotti di questi singolari fenomeni.

Senza arrogarmi di trattare questa questione dal punto di vista tecnico, ragionando unicamente sulla base di criterii di anatomia botanica, sottopongo però al giudizio dei tecnici queste mie osservazioni parendomi che esse abbiano un certo peso e possano consigliare un esame attento dell'argomento.

La differenza notevolissima di resistenza dei varii elementi e quindi dei varii strati che compongono i cerchi legnosi è un fatto indiscutibile, che deve *almeno* essere convenientemente considerato e studiato.

Ora che la costruzione degli aeroplani, terminata la guerra, sarà rivolta a scopi di indole essenzialmente differente da quelli bellici, non sarebbe il caso di pensare a sostituire al legno qualunque esso sia (in specie nella costruzione dei *lungheroni d'ala*), un materiale metallico di cui si possa con criterii di *assoluta certezza*, conoscere i limiti precisi di resistenza?

Qualche chilogramma di più nel peso dell'apparecchio eliminerebbe il ripetersi di disgrazie come quelle qui contemplate, le quali causarono la morte di parecchi intrepidi nostri ufficiali.

Matematica. — *Definizione geometrica di linea, superficie, solido.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Attualmente si sa dare una definizione generale ed esatta di *linea*, *superficie*, *solido*, solo ricorrendo al concetto di « *punto funzione continua* di uno, due, tre numeri reali, variabili indipendenti, aventi degli *intervalli* come campo di variabilità », ma non se ne conosce una definizione puramente geometrica ed esatta (1). Scopo di questa Nota è appunto di definire, in generale, e sotto forma semplicissima, le *linee*, *superficie*, *solidi*, indipendentemente dal *punto funzione continua di variabili numeriche reali*, rimanendo così nel campo puramente geometrico.

È necessario basarsi su di un sistema geometrico completo e logicamente stabilito. Scegliamo quello sviluppato da M. Pieri nella sua importante

(1) Di errate se ne trovano in molti libri; ma crediamo inutile citarle e discuterle. Le seguenti definizioni [4] esprimono in termini precisi le ben note pseudo-definizioni di Euclide [II, V, I dei libri I, I, XI] senza che vi sia bisogno di definire i termini *lunghezza, larghezza, grossezza*, il che sarebbe nè facile nè opportuno.

Memoria: *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera* (2).

Conviene, inoltre, sviluppare, secondo le forme attuali, quanto ora indichiamo. — Si dia una qualunque delle possibili definizioni di *distanza* (o *lunghezza*) (3) in base ai concetti primitivi *punto*, *sfera*. — Si definisca, col significato usuale, la *somma*, $+$, di due distanze. Dai postulati e teoremi di Pieri risulterà che la classe *distanza* è una « classe di grandezze omogenee rispetto alla operazione $+$ » (4); varranno, quindi, per essa, le ordinarie proprietà (4) e, in particolare, quelle, che a noi più interessano, relative ai simboli 0 (zero), $>$, $<$, $1'$, 1_1 (*limite superiore* ed *inferiore*).

Traducendo in simboli ideografici, faremo uso delle notazioni ordinarie (5) ed inoltre delle seguenti che sono in parte note (5):

$\text{dist}(x, y)$, « distanza del punto x dal punto y, col significato stabilito per definizione (cf. sopra) »;

$$x \varepsilon \text{ pnt} . u \varepsilon \text{ Cls}' \text{ pnt} . \exists u : \exists_{x,y} : \text{dist}(x, u) = 1_1 [\text{dist}(x, y) \mid y \text{ ' } u],$$

cioè, $\text{dist}(x, u)$, « distanza del punto x dalla figura (classe non vuota, di punti) u » è il « limite inferiore delle distanze di x dai punti di u »;

$$0 . = . 1 [\text{dist}(x, x) \mid x \text{ ' pnt}],$$

cioè, 0, « zero », « distanza nulla », è la « distanza di un qualsiasi punto da se stesso »;

$$\text{Dist} . = . h \ni \exists (x, y) \ni [x . y \varepsilon \text{ pnt} . x \neq y . h = \text{dist}(x, y)],$$

cioè, Dist, « distanza non nulla », è la « classe formata dalle $\text{dist}(x, y)$, variando x, y comunque sulla classe punto, purchè sia x diverso da y ».

***

Le definizioni che formano principale oggetto di questa Nota sono basate sul concetto di « figura *derivata* della figura u » che, imitando quanto si fa per le classi di numeri reali (5), indicheremo con δu e definiremo ponendo

[1] $$u \varepsilon \text{ Cls}' \text{ pnt} . \exists u : \exists_u : \delta u . = . \text{pnt} \cap x \ni [\text{dist}(x, u - \iota x) = 0],$$

(2) Società italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie 3ª, Tomo XV.

(3) C. Burali-Forti, *Nuove applicazioni degli operatori* (Atti Acc. Torino, vol. IV, a. 1915, pp 669-684).

(4) S. Catania, *Sulle condizioni che determinano una classe di grandezze* (Atti Acc. Torino, vol. LI, pp. 27-37). — *Grandezze e numeri* (N. Giannotta, Edit., Catania, 1915). — *Lunghezze, aree, volumi* (Periodico di matematica, a. XXXII).

(5) *Formulario matematico*, edito per G. Peano. [Cfr. anche la 2ª edizione, interamente rifatta, del mio « manuale Hoepli » *Logica matematica* in corso di stampa e di prossima pubblicazione.

cioè, δu, « figura derivata della figura u », è la « figura i cui punti x sono soltanto quelli che hanno distanza nulla dalla figura formata dai punti di u che sono diversi da x ».

Sostituendo a dist $(x, u - \iota x)$ la espressione che la definisce mediante il *limite inferiore* e lo stesso facendo per questo, la [1] assume la forma

$$[1'] \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Hp}[1] : \mathfrak{O}_u : \delta u . \equiv . \\ &\mathrm{pnt} \cap x \ni [h \varepsilon \mathrm{Dist} . \mathfrak{O}_h . \exists u - \iota x \cap y \ni \{\mathrm{dist}(x, y) < h\}], \end{aligned}$$

cioè, « x è un punto di δu » solamente quando « x è un punto e comunque si fissi la distanza non nulla h (piccola a piacere), esiste sempre almeno un punto diverso da x ed appartenente ad u, che dista da x meno di h ». Ciò esprime in modo assai semplice come è formata la δu.

* * *

Seguendo le denominazioni usate per le classi di numeri reali [6]. si può dire che la figura u è *perfetta* » quando « $u = \delta u$ »; « la figura u è formata da *punti isolati* » quando « u e δu non hanno elementi a comune, cioè $- \exists (u \cap \delta u)$ ». Ci sarà comodo introdurre le notazioni seguenti:

$\mathrm{Fig_p}$, « figura perfetta »
$\mathrm{Fig_0}$, « figura formata da *punti isolati* »

che definiremo ponendo

$$[2] \qquad \mathrm{Fig_p} . \equiv . \mathrm{Cls}' \mathrm{pnt} \cap u \ni \{\exists u . u = \delta u\}$$
$$[3] \qquad \mathrm{Fig_0} . \equiv . \mathrm{Cls}' \mathrm{pnt} \cap u \ni \{\exists u . - \exists (u \cap \delta u)\} \ (^7)$$

cioè: $\mathrm{Fig_p}$ vale « classe di punti, non vuota, che coincide con la sua classe derivata »; $\mathrm{Fig_0}$ vale « classe di punti, non vuota, che non ha punti a comune con la sua classe derivata ».

* * *

Definiamo ora la Fig_r « figura di specie r » che corrisponde, in *senso lato* (come vedremo), a *linea* per $r = 1$, a *superficie* per $r = 2$, a *solido* per $r = 3$. Tenendo conto della [3] possiamo comprendere in un'unica de-

(6) Cfr. (5) Editio IV, pag. 121.

(7) Eliminando il δ, e sottintesa l'ipotesi $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{pnt} . \exists u$, si ha:

$$[2'] \qquad \begin{aligned} u \varepsilon \mathrm{Fig_p} . \therefore = \therefore x \varepsilon u . h \varepsilon \mathrm{Dist} . \mathfrak{O}_{u,h} . \exists u - \iota x \cap y \ni \{\mathrm{dist}(x, y) < h\} : \\ \mathrm{pnt} \cap x \ni \{\mathrm{dist}(x, u) = 0\} . \mathfrak{O} . u \end{aligned}$$

$$[3'] \qquad u \varepsilon \mathrm{Fig_0} . = . \exists \mathrm{Dist} \cap h \ni \{x, y \varepsilon u . x - = y . \mathfrak{O}_{x,y} . \mathrm{dist}(x, y) \geqq h\} .$$

Si noti che $\mathrm{pnt} \cap x \ni \{\mathrm{dist}(x, u) = 0\}$ è la « classe limite di u », $\lambda u = u \cup \delta u$ [cfr. (5), Editio V, pag. 177, P 25·1].

finizione i tre casi $r = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$:

$$[4] \qquad r \varepsilon\, 1 \cdots 3 : \mathfrak{I}_r : \mathrm{Fig}_r \,.\equiv.$$
$$\mathrm{Fig}_p \cap u \ni [x \varepsilon u \,.\, \mathfrak{I}_x \,.\, \exists\, \mathrm{plan} \cap a \ni \{ x \varepsilon a \,.\, (u \cap a) \varepsilon \mathrm{Fig}_{r-1} \}\,] ;$$

u è una « figura di specie r, una Fig_r, ordinatamente, per $r = 1 \,,\, 2 \,,\, 3$ », solamente quando: « u è, anzitutto, una figura perfetta, una Fig_p, ed inoltre: qualunque sia il punto x di u, esiste sempre almeno un piano a, uscente da x, tale che, i punti comuni ad u e ad a (intersezione di u con a) formano una figura di specie $r - 1$, una Fig_{r-1} » (8).

Una *retta*, un *segmento* (estremi compresi), una *circonferenza*, ecc., sono delle Fig_1 secondo la [4]. Due o più *rette*, una *retta* e una *circonferenza*, ecc., aventi *posizioni* relative del tutto arbitrarie, formano (somma logica) delle Fig_1, ancora nel significato [4]. Vale a dire: Fig_1 corrisponde a *linea*, ma in *senso lato*, indicando, indifferentemente, ciò che nel linguaggio comune viene espresso da *linea* (semplice, limitata o pur no), *arco di linea* (estremi compresi), *sistema di linee*, *linea che si spezza*, ecc — Lo stesso può dirsi per Fig_2, Fig_3 che vengono a corrispondere a *superficie* e *solido*, ma in *senso lato*, preferibile al senso ristretto ordinario.

***

Si noti che nella [4] in luogo di dire « esiste almeno un piano a, uscente da x, ... », si può dire « esiste almeno una *sfera* (ente primitivo di Pieri, superficie particolare) di centro x, ... ». O, anche, conservando il termine *distanza*, alla parte a destra di $\mathfrak{I}_x$ della [4] si può sostituire

$$\exists\, \mathrm{Dist} \cap h \ni \{ u \cap y \ni (\mathrm{dist}\,(x\,,\,y) = h) \varepsilon \mathrm{Fig}_{r-1} \}\,,$$

« esiste una distanza non nulla h tale che i punti di u aventi distanza h da x, formano una Fig_{r-1} ».

La convenienza di far uso di una, piuttosto che di un'altra, delle forme ora indicate, dipende dal modo col quale si svilupperà il sistema geometrico, mantenendo i fondamenti stabiliti da Pieri, o sostituendone altri equivalenti. Ciò che interessa constatare è la possibilità di dare sotto forma semplicissima, e nel *senso lato* che occorre spesso in geometria, la definizione puramente geometrica di *linea*, *superficie*, *solido*.

Notiamo ancora che le definizioni date in questa Nota possono estendersi agli « spazi ad n dimensioni » dei quali lo stesso Pieri ha stabiliti i fondamenti (9).

(8) Per $r = 1$ interviene la Fig_0 definita dalla [3], per $r = 2$ la Fig_1 e per $r = 3$ la Fig_2; quindi la necessità dell'*ordine* 1, 2, 3.

(9) *I principii della geometria di posizione composti con sistema logico deduttivo* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, Tomo XLVIII, a. 1897).

Matematica. — *Deformazioni elastiche nelle quali una superficie o una famiglia di superficie del corpo si comportano come flessibili e inestendibili.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Sia $\mathbf{s}(P)$ lo spostamento che definisce una deformazione d'un corpo S, di cui P sono i suoi punti. Qual forma deve avere l'omografia della pura deformazione $D\alpha = D\frac{d\mathbf{s}}{dP}$, affinchè esista nel corpo una superficie σ che nella deformazione si comporti come se fosse flessibile e inestendibile? Manifestamente per ogni suo punto P e ogni direzione $\mathbf{a}$ tangente alla σ il coefficiente di dilatazione lineare dev'esser nullo, e nulli anche gli scorrimenti di due direzioni ortogonali $\mathbf{a}$ e $\mathbf{h}$. Dunque

$$D\alpha\,\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0 \qquad D\alpha\,\mathbf{a} \times \mathbf{h} = 0\,,$$

per ogni

$$\mathbf{a} \times \operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \mathbf{h} \times \operatorname{grad}\varphi = 0\,,$$

e per tutti i punti P soddisfacenti all'equazione della superficie $\varphi(P) = c$. Si trae intanto

$$D\alpha\,\mathbf{a} = m_a \operatorname{grad}\varphi\,;$$

ove il numero m_a dipenderà linearmente da $\mathbf{a}$, nel senso che devono essere soddisfatte le condizioni

$$m_a + m_{a_1} = m_{a+a_1} \qquad m_{sa} = s m_a\,.$$

Esso rappresenterà dunque il risultato ottenuto con un operatore lineare che applicato a vettori dà numeri; ossia sarà $m_a = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$; per conseguenza

$$D\alpha\,\mathbf{a} = (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \operatorname{grad}\varphi = H(\mathbf{u}, \operatorname{grad}\varphi)\,\mathbf{a}\,,$$

valevole per ogni $\mathbf{a}$ e P soddisfacente alle condizioni

$$\mathbf{a} \times \operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \varphi(P) - c = 0\,.$$

Moltiplicando queste rispettivamente per $\mathbf{u}$ e $f(P)$ e sommandole con la precedente si deduce

$$D\alpha = H(\mathbf{u}, \operatorname{grad}\varphi) + H(\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{u}) + (\varphi - c) f,$$

quale forma generale della $D\alpha$ cercata. Ma perchè rappresenti una pura deformazione occorre poi che soddisfi alla condizione di Saint-Venant

$$\text{Rot K Rot } D\alpha = 0 .$$

Non è il caso di sviluppare questa condizione, che per la sua complessità non sarebbe utile. Preferiamo invece trattare un caso particolare.

2. La superficie $\varphi = c$ sia un piano. Se A è un suo punto e $\mathbf{k}$ un vettore unitario normale al piano, posto $(P - A) \times \mathbf{k} = z$, allora z è la distanza (con segno) da P dal detto piano, e risulta $\text{grad } z = \mathbf{k}$. Prendiamo inoltre $f = h = \text{cost}$, ed allora possiamo scrivere

$$D\alpha = hz + H(\mathbf{u}, \mathbf{k}) + H(\mathbf{k}, \mathbf{u}) .$$

Di qui si trae

$$\text{Rot } D\alpha = h\mathbf{k} \wedge - \mathbf{k} \wedge \text{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP} + H(\mathbf{k}, \text{rot } \mathbf{u})$$

$$\text{K Rot } D\alpha = - h\mathbf{k} \wedge + \frac{d\mathbf{u}}{dP} . \mathbf{k} \wedge + H(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{k}) .$$

Perciò, a norma della condizione di Saint-Venant, il vettore $\mathbf{u}$ deve soddisfare alla condizione

$$\left(\text{Rot} \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) . \mathbf{k} \wedge = \mathbf{k} \wedge \text{K Rot} \frac{d\mathbf{u}}{dP} .$$

che può scriversi nella forma

$$\frac{d \text{ rot } \mathbf{u}}{dP} . \mathbf{k} \wedge = \mathbf{k} \wedge \text{K} \frac{d \text{ rot } \mathbf{u}}{dP} .$$

Il secondo membro è di segno opposto al coniugato del primo, perciò dev'essere

$$\frac{d \text{ rot } \mathbf{u}}{dP} . \mathbf{k} \wedge = \mathbf{v} \wedge ,$$

con $\mathbf{v} = m\mathbf{k}$, affinchè risulti $\mathbf{v} \wedge \mathbf{k} = 0$. E allora si deduce

$$\frac{d \text{ rot } \mathbf{u}}{dP} = m .$$

Ma

$$\text{I}_1 \frac{d \text{ rot } \mathbf{u}}{dP} = \text{div rot } \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad \text{I}_1 m = 3m ;$$

dunque

$$m = 0 \quad \text{e} \quad \text{rot } \mathbf{u} = 2\mathbf{c} = \text{cost.}$$

Ne consegue

$$\mathbf{u} = \text{grad } \psi + \mathbf{c} \wedge (P - 0) . \tag{1}$$

Esistono dunque delle deformazioni per cui un piano si comporta come flessibile e inestendibile; anzi, fatto $h = 0$, *tutti i piani normali a* $\mathbf{k}$ *si comportano come flessibili e inestendibili nella deformazione definita da*

$$\mathrm{D}\alpha = \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{k}) + \mathrm{H}(\mathbf{k}, \mathbf{u}), \tag{2}$$

ove $\mathbf{u}$ *ha l'espressione* (1).

3. Supponiamo che, in quest'ultimo caso, il corpo sia mantenuto in equilibrio da opportune forze di massa e superficiali.

Sia β l'omografia delle tensioni elastiche. Se il corpo è isotropo, si ha

$$\beta = -\lambda \mathrm{I}_1 \mathrm{D}\alpha - 2\mu\, \mathrm{D}\alpha = -2\lambda\, \mathbf{u} \times \mathbf{k} - 2\mu \{ \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{k}) + \mathrm{H}(\mathbf{k}, \mathbf{u}) \};$$

dalla quale si trae

$$\beta\mathbf{k} = -2(\lambda + \mu)(\mathbf{u} \times \mathbf{k})\, \mathbf{k} - 2\mu \mathbf{u}$$
$$\beta\mathbf{a} = -2\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{k})\, \mathbf{a} - 2\mu(\mathbf{u} \times \mathbf{a})\, \mathbf{k} \qquad \text{se } \mathbf{a} \times \mathbf{k} = 0.$$

Scegliamo $\mathbf{u}$ in guisa che sia soddisfatta la condizione $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$; ossia

$$\operatorname{grad} \psi \times \mathbf{k} + \mathbf{c} \wedge (\mathrm{P} - 0) \times \mathbf{k} = 0; \tag{o}$$

risulta

$$\beta\mathbf{k} = -2\mu\mathbf{u} \qquad \beta\mathbf{a} = -2\mu(\mathbf{u} \times \mathbf{a})\, \mathbf{k} \tag{3}$$

per ogni $\mathbf{a}$ normale a $\mathbf{k}$. Ne consegue che *in ogni elemento superficiale normale a* $\mathbf{k}$ *e in tutti gli elementi paralleli a* $\mathbf{k}$ *le tensioni elastiche sono puramente tangenziali.*

Prendendo il piano (x, y) normale a $\mathbf{k}$, la condizione (o) diventa della forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + ly - mx = 0;$$

da cui si trae

$$\psi = (mx - ly)\, z + \chi(x, y).$$

Perchè l'equilibrio sussista occorre che le forze di massa siano definite dall'equazione

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \beta \qquad (\text{densità} = 1).$$

Eseguendo il calcolo si trova:

$$\mathbf{F} = 2\lambda \mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{k} + 2\mu \left(\operatorname{div} \mathbf{u}\, .\, \mathbf{k} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{k} \right)$$

$$= 2\lambda \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{k} - 2\mathbf{c} \wedge \mathbf{k} \right) + 2\mu \left(\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \right) \mathbf{k}$$

$$= 2(\lambda + \mu) \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\, \mathbf{k} + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{u}\, .\, \mathbf{k} - 4\lambda \mathbf{c} \times \mathbf{k}.$$

Sostituendo ad $\mathbf{u}$ la sua espressione, e tenendo presente che

$$\text{grad}\,(mx - ly) = m\mathbf{i} - l\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{c}\times\mathbf{k} = m\mathbf{i} - l\mathbf{j}\ ,\ (\mathbf{c} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

si deduce

$$\mathbf{F} = 4\mu\,(m\mathbf{i} - l\mathbf{j}) - 2\mu\,\Delta\chi\cdot\mathbf{k}\ .$$

Poichè $\Delta\chi$ è funzione soltanto di x e y, ne risulta che le forze di massa son costanti lungo ogni fibra parallela a $\mathbf{k}$, e da fibra a fibra varia soltanto la componente parallela alla fibra stessa.

Prendiamo $\chi = \frac{a}{2}r^2 + \varphi(x, y)$, ove $r^2 = x^2 + y^2$ e $\Delta\varphi = 0$; allora risulta $\Delta\chi = 2a$ (cost) e quindi

$$\mathbf{F} = 4\mu\,(m\mathbf{i} - l\mathbf{j} - a\mathbf{k})\ ,$$

cioè la forza di massa è costante.

Così. se il corpo ha forma cilindrica con le generatrici parallele a $\mathbf{k}$ e le basi normali a $\mathbf{k}$, la deformazione in discorso potrà mantenersi con forze di massa costanti e con forze superficiali tangenziali.

4. Applichiamo tutto questo al caso del cilindro retto, fissato verticalmente alla sua base inferiore ($z = 0$) e sollecitato dalla sola gravità. Se G è il peso dell'unità di volume, risulta $\mathbf{F} = -\mathrm{G}\mathbf{k}$ e quindi $m = l = 0$, $a = \frac{\mathrm{G}}{4\mu}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \text{grad}\,\chi + n(x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) \\ &= \left(\frac{\mathrm{G}}{4\pi}x - ny\right)\mathbf{i} + \left(nx + \frac{\mathrm{G}}{4\pi}y\right)\mathbf{j} + \text{grad}\,\varphi\ .\end{aligned}$$

Da questa e dalle (3) si deduce che le forze alla base libera son definite da

$$\mathbf{F}_0 = \left(\frac{\mathrm{G}}{2}x - 2\mu n y\right)\mathbf{i} + \left(2\pi n x + \frac{\mathrm{G}}{2}y\right)\mathbf{j} + 2\pi\,\text{grad}\,\varphi\ ,$$

e sulla parete laterale da

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0 = \Big[&\left(\frac{\mathrm{G}}{2}x - 2\mu n y\right)(\mathbf{i}\times\mathbf{a}) + \\ &+ \left(2\mu n x + \frac{\mathrm{G}}{2}y\right)(\mathbf{j}\times\mathbf{a}) + 2\pi\,(\text{grad}\,\varphi\times\mathbf{a})\Big]\mathbf{k}\end{aligned}$$

dove a è la normale in un punto generico del contorno σ d'ogni sezione orizzontale. Essendo φ armonica nel piano di σ, si può calcolarla in guisa che risulti

$$2\mu\,\text{grad}\,\varphi\times\mathbf{a} = -\left(\frac{\mathrm{G}}{2}x - 2\pi n y\right)(\mathbf{i}\times\mathbf{a}) - \left(2\pi n x + \frac{\mathrm{G}}{2}y\right)(\mathbf{j}\times\mathbf{a})$$

e quindi $\mathbf{F}_\sigma = 0$? Bisognerebbe risolvere il problema di determinare una funzione armonica per dati valori al contorno s della sua derivata normale. Il problema sarà possibile, se risulta

$$\int_s \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}\, ds = 0 .$$

Indicando con n la lunghezza della normale $\mathbf{a}$ a partire da P, si ha $\mathbf{a} \times \mathbf{i} = \frac{dx}{dn}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{j} = \frac{dy}{dn}$; e quindi usando le formule

$$\int_s \Phi \frac{dx}{du}\, ds = -\int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\sigma \quad , \quad \int_s \Phi \frac{dy}{dn}\, ds = -\int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, d\sigma ,$$

si trova

$$\int_\sigma \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}\, ds = \int_\sigma \frac{\mathrm{G}}{2}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\mathrm{G}}{2}\, d\sigma = \mathrm{G}\sigma ;$$

che non può esser nullo. Quindi per mantenere il cilindro in equilibrio nella deformazione considerata, quando agisce la gravità, occorrono delle forze lungo la superficie laterale. Queste forze si possono scegliere con una certa arbitrarietà, purchè sia lungo il contorno

$$\int_s \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{k}\, ds = -\mathrm{G}\sigma ,$$

come risulta dai calcoli precedenti. Allora l'*armonica* φ *corrispondente si determinerà risolvendo il problema di Neumann relativo a un contorno circolare*; problema che si sa risolvere.

Abbiamo così dimostrato con un interessante esempio concreto la possibilità di calcolare forze capaci di equilibrare un cilindro retto elastico in una deformazione nella quale tutte le sezioni rette si sono comportate come flessibili e inestendibili.

Matematica. — *Sopra un'equazione integro-differenziale di tipo Bôcher*. Nota del prof. G. C. Evans (di Houston, Texas), presentata dal Socio V. Volterra.

1. Questo studio, destinato per certe conferenze all'Università di California da tenersi nel 1918, ma interrotto dalla guerra e ripreso solamente adesso, tratta di certe equazioni integro-differenziali; e cioè di equazioni contenenti le derivate e gli integrali, ma, in questo caso, integrali eseguiti sopra campi arbitrarî e variabili, invece che sopra campi determinati, come nel caso delle equazioni, già molto conosciute, del prof. Volterra. Perciò ho dato loro il nome di chi le ha dapprima considerate, del Bôcher (1).

Nel lavoro *On harmonic functions in two dimensions* (2), il Bôcher considerò l'equazione

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

essendo l'integrazione eseguita sopra le circonferenze di cerchi arbitrarî, per le funzioni u continue colle loro derivate di primo ordine. Sebbene l'equazione ci riconduca alla solita equazione di Laplace e non dia risultati nuovi, il metodo adoperato non fa uso dei risultati conosciuti per l'equazione di Laplace, e si basa invece sulle proprietà dell'integrazione.

L'equazione che considereremo è l'equazione di Poisson generalizzata in modo analogo. La forma che ne risulta non si può ricondurre all'equazione differenziale presa come punto di partenza. È possibile, invece, far uso di tutta la generalità della teoria delle funzioni di variabili reali; ed i risultati ottenuti si riferiscono essenzialmente a quella generalità e alla forma integrale dell'equazione. Inoltre, facendo uso continuamente di enti a due dimensioni, la teoria si avvicina di più a quella propria al problema corrispondente nella fisica.

2. Sia Σ un campo, limitato nel piano, e $f(e)$ una funzione addittiva di insiemi normali di punti, la quale s'annulli se l'insieme e non contiene qualche punto almeno di Σ. La funzione $f(e)$ sarà la differenza di due tali funzioni di insiemi, non negative; l'esempio più importante fra gli enti fisici di una tale funzione è la carica elettrica.

(1) A questo soggetto è dedicata la conferenza IV di *The Cambridge Colloquium*, Part I, dell'Autore; New York (1918).

(2) Proceedings of the American Academy of Science (1906).

Alla $f(e)$ facciamo corrispondere una funzione di linee $F(s)$ nel piano:

$$(1) \qquad F(s_1) = \int_{\Sigma} \left\{ \int_{s_1} \frac{\cos nr}{r} \, ds_1 \right\} df(e) ,$$

formula in cui n è la normale interna alla linea chiusa s_1, ed r la distanza $P_1 P$ da un punto di s_1 a un punto di Σ [1]. La funzione di linee è anche essa addittiva e di variazione limitata, differenza di due funzioni di tipo positivo.

L'equazione che risolviamo è la seguente:

$$(A) \qquad \int_s \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = F(s) .$$

Per mezzo di una rete di quadrati, definita nella maniera del De la Vallée Poussin, possiamo fare il passo inverso, e da una funzione di linee addittiva e di variazione limitata ricavare una funzione addittiva di insiemi di punti. Infatti, se per caso la funzione di linee è continua (definizione del Volterra), avremo $f(e) = F(s)$, in cui e è l'insieme dei punti interni ad s.

Se da una $f(e)$ passiamo a una funzione di linee per mezzo della (1) e poi torniamo per mezzo della seconda corrispondenza di nuovo a una funzione di insiemi di punti, abbiamo quella da cui siamo partiti. Se invece partiamo da una funzione di linee, passando ad una funzione $f(e)$, e poi tornando di nuovo per mezzo della (1), ricaviamo la stessa funzione di linee per una linea in cui la funzione di linee è continua. Sopra una linea di discontinuità, però, le discontinuità vengono ripartite *in modo regolare*; se il tratto s' di curva, per esempio, ha ovunque una tangente, e fa parte allo stesso tempo dei due contorni reciprocamente esterni s_1, s_2, una metà della discontinuità sopra s' risulta compresa nella $F(s_1)$ e l'altra nella $F(s_2)$.

Si può dire dunque che consideriamo nella (A) una funzione di linee nel campo Σ di variazione limitata, addittiva, arbitraria, purchè abbia le discontinuità distribuite in modo regolare. Corrisponde ad una funzione addittiva di insiemi, completamente arbitraria nel campo Σ.

Si consideri una famiglia S di linee chiuse s, semplici e rettificabili, che contenga tutti i rettangoli e cerchi del piano, ma per ulteriori estensioni si possa limitare automaticamente per la necessità di fare convergere gli integrali curvilinei che si devono eseguire.

3. Definiamo delle derivate nelle diverse direzioni, in modo da accordarsi cogli enti a due dimensioni. Infatti, definiamo $D_h u$, derivata genera-

[1] Per uno studio di simili integrali Lebesgue-Stieltjes, vedi Daniell, Annals of Mathematics, vol. 19 (1918).

lizzata nella direzione h della u, come il limite, se tale limite esiste, dell'espressione:

$$(2) \qquad D_h u = \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \int_s u \, dh'$$

in cui l'angolo $hh' = \pi/2$, e con σ si denoti l'area racchiusa dal contorno s. L'area σ deve tendere allo zero in modo che il rapporto σ/d^2, ove d è il diametro di σ, non tenda allo zero.

Così si ha

$$D_x u = \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \int_s u \, dy \quad , \quad D_y u = - \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \int_s u \, dx ,$$

e la legge del parallelogramma delle forze vale per queste derivate se esistono:

$$(3) \qquad D_h u = D_x u \cos xh + D_y u \cos yh .$$

Sia φ_h componente del vettore φ in una data direzione h, integrabile nel senso di Borel sopra il piano. Se esiste una funzione u tale che si abbia

$$\int_\sigma \varphi_h \, d\sigma = \int_s u \, dh'$$

per ogni contorno s di S, e per ogni direzione h, si dirà che la u è potenziale del vettore φ. In questo caso esisterà la derivata $D_h u = \varphi_h$, e questa derivata soddisferà alla legge (3), tranne nei punti di un insieme di misura nulla, il quale si può scegliere indipendentemente dalla direzione h.

4. Se $q(P_1, P)$ è funzione continua dei punti P_1, P, si ha l'identità

$$(4) \qquad \int_{s_1} ds_1 \int_\Sigma q(P_1, P) \, df(e) = \int_\Sigma \left\{ \int_{s_1} q(P_1, P) \, ds_1 \right\} df(e) .$$

Se $p(e)$ è una funzione addittiva di insiemi, non negativa, e $q(P_1, P)$ una funzione di punti, non negativa, che diviene infinita per il solo punto $P = P_1$, ma è continua in P per gli altri valori, possiamo definire

$$\begin{aligned} q^{(n)}(P_1, P) &= q(P_1, P) \quad \text{se} \quad q \leq n , \\ &= n \qquad\quad \text{se} \quad q \geq n , \end{aligned}$$

e finalmente

$$(5) \qquad \int_\Sigma q(P_1, P) \, dp(e) = \lim_{n=\infty} \int_\Sigma q^{(n)}(P_1, P) \, dp(e)$$

se tale limite esiste. Sommando quattro integrali di questo tipo si riesce a definire la convergenza assoluta di $\int q \, df(e)$, in cui q non resta più non negativa, ed $f(e)$ è la solita funzione di insieme, addittiva, arbitraria.

Per mezzo di un'integrazione sopra un campo σ si dimostra che gli integrali

$$\int \frac{1}{r}\, df(e) \quad , \quad \int \frac{\cos hr}{r}\, df(e) \quad , \quad \int \log \frac{1}{r}\, df(e)$$

esistono tutti, e sono integrabili nel senso di Borel. Inoltre, la funzione di P_1, $\int \log \frac{1}{r}\, df(e)$, è integrabile (B) lungo un tratto di retta qualsiasi, o lungo una curva qualsiasi s purchè sia tale che esista una costante A:

$$A \geq \int_s \log \frac{1}{r}\, ds .$$

per tutti i punti P_1 di s.

Per mezzo delle equazioni (4), (5) si hanno le identità seguenti:

$$\int_{\sigma_1} d\sigma \int_\Sigma \frac{\cos hr}{r}\, df(e) = \int_{s_1} dh' \int_\Sigma \log \frac{1}{r}\, df(e) \tag{6}$$

$$\int_{s_1} ds_1 \int_\Sigma \frac{\cos nr}{r}\, df(e) = \int_\Sigma \left\{ \int_{s_1} \frac{\cos nr}{r}\, ds_1 \right\} df(e) . \tag{7}$$

Dalla (6) possiamo dedurre che la funzione $\int \log \frac{1}{r}\, df(e)$ è potenziale delle sue derivate generalizzate, le quali esistono e soddisfano alla legge del parallelogramma delle forze, tranne nei punti di un insieme E di misura nulla, scelto indipendentemente dalla direzione h. E per mezzo delle (1), (7) si ha che la funzione

$$u(P_1) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \log \frac{1}{r}\, df(e) \tag{B}$$

è soluzione della (A) per tutte le s_1 che non contengono punti di E in più di un insieme di misura nulla lineare.

5. Non esiste più di una sola soluzione della (A) che sia integrabile nel senso di Borel, che sia potenziale delle sue derivate, e, sopra un contorno chiuso rettificabile, tranne nei punti di un insieme di misura nulla lineare, prenda valori assegnati, supposto che la soluzione sia derivata funzionale del suo integrale a due dimensioni per tutti i punti di tale contorno, tranne per quelli di un insieme di misura nulla lineare.

Infatti, la differenza di due tali funzioni è soluzione dell'equazione

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$$

e ha tutte le sue discontinuità rimovibili. Così si possono senz'altro applicare i metodi del Bôcher.

Meccanica. — *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Alcune proprietà delle operazioni permutabili e delle sostituzioni regolari sopra lettere.* Nota II di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

II.

4. Le proprietà che svilupperemo ora si trovano enunciate nell'opera citata del Burnside, e siccome esse ci sembrano abbastanza interessanti, vogliamo darne qui delle semplici dimostrazioni.

Ricordiamo che si dice *regolare* una sostituzione sopra lettere, quando, decompostala in cicli, questi risultano tutti di un medesimo numero di lettere. È evidente che il periodo di una sostituzione regolare S è uguale a quello di un suo ciclo qualunque, ed è un divisore del numero totale delle lettere su cui agisce S. In particolare le sostituzioni circolari sono da riguardarsi come regolari di un solo ciclo.

Dimostriamo il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una sostituzione S *sia regolare, è che* S *sia la potenza di una sostituzione ciclica.*

Data una sostituzione ciclica qualunque C, agente sulle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_n$, è evidente che tutte le potenze di C sono sostituzioni regolari sopra le stesse lettere.

Inversamente, sia la sostituzione regolare

$$S = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) \cdot (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}) \cdot (a_{31}, \ldots, a_{3m}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{nm}),$$

dove n è il numero dei cicli, e m è il periodo di S; questa si può scrivere

$$S = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}, a_{13}, \ldots, a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})^n,$$

che è la potenza $n \,.\, m\grave{a}$ di una sostituzione circolare sopra le mn lettere di S. La condizione è dunque pure sufficiente. C. d. d.

Osserviamo che, sebbene possa variare la sostituzione ciclica C, di cui S è potenza, l'esponente x di C deve però essere multiplo di n. Infatti, se

$S = C^x$, si ha $S^m = C^{xm} = 1$; e siccome C ha il periodo mn, segue che xm è un multiplo di mn, e quindi che x è multiplo di n.

Corollario. *Le potenze di sostituzioni regolari sono pure regolari.*

Infatti sia S una sostituzione regolare, potenza della ciclica C, e sia $S = C^r$. Ogni potenza S^x di S è $= C^{rx}$, che è pure regolare.

5. Ora dimostriamo il teorema:

Le sole sostituzioni operanti su m lettere che sieno permutabili con una data sostituzione ciclica C *sulle stesse m lettere, sono le potenze di questa sostituzione ciclica* [1].

Sia la sostituzione ciclica $C = (a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1})$, e sia S una sostituzione qualunque permutabile con C; poniamo

$$S = \begin{pmatrix} a'_0 , a'_1 , \dots , a'_{n-1} \\ a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1} \end{pmatrix},$$

dove le lettere $a'_0 , a'_1 , \dots , a'_{n-1}$ sono le stesse lettere $a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1}$, in altro ordine. Si ha $CS = SC$, ossia $S^{-1}CS = C$; ma la trasformata $S^{-1}CS$ non è altro che $(a'_0 , a'_1 , \dots , a'_{n-1})$, che dev'essere $= C$; dunque le due sostituzioni cicliche

$$(a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1}) \quad \text{e} \quad (a'_0 , a'_1 , \dots , a'_{n-1})$$

coincidono. Posto che sia $a'_0 = a_r$, dev'essere $a'_{0+i} = a_{r+i}$, qualunque sia $i = 1 , 2 , \dots , n-1$, e quindi la S si può scrivere

$$S = \begin{pmatrix} a_r , a_{r+1} , a_{r+2} , \dots \\ a_0 , a_1 \quad , a_2 \quad , \dots \end{pmatrix}.$$

che è uguale a

$$(a_0 , a_r , a_{2r} , a_{3r} , \dots) = (a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1})^r .$$

Dunque si ha $S = C^r$. C. d. d.

In generale se una sostituzione S sopra lettere è permutabile con C, e se S agisce anche su lettere diverse da $a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1}$, dal ragionamento superiore si vede che S è il prodotto di una potenza C^r per un'altra sostituzione T, agente su lettere tutte diverse da $a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1}$. Dunque:

Le sostituzioni S *permutabili con la sostituzione ciclica*

$$C = (a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1})$$

[1] Questo teorema è un caso particolare di un altro: Se G è un gruppo abeliano transitivo di sostituzioni, e di ordine uguale al numero delle proprie lettere, le sole sostituzioni sopra quelle lettere che siano permutabili con tutte quelle di G, sono le sostituzioni di G stesso.

sono tutte e sole quelle della forma $C^r.T$, *dove* T *è una sostituzione agente su lettere tutte diverse da* $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, *e* C^r *una potenza di* C (*eventualmente* $C^r = 1$, ovvero $T = 1$).

Siccome C^r, se non è l'identità, sposta tutte quante le lettere $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, segue come corollario: *Ogni sostituzione* S *che sia permutabile con la ciclica* C, *se non agisce su lettere tutte diverse da quelle di* C, *deve spostare tutte quante le lettere di* C.

Ancora: Se una sostituzione *ciclica* S agisce sopra le lettere della ciclica C e inoltre anche sopra altre lettere, la S non può essere permutabile con C.

Infatti in tal caso la S non si può decomporre in un prodotto della forma $C^r.T$, essendo unica la decomposizione di una sostituzione in cicli.

6. Dimostriamo ora il teorema:

Se S *e* T *sono due sostituzioni regolari permutabili sopra le stesse mn lettere, e degli ordini m e n rispettivamente, con m e n numeri primi tra loro, il prodotto* ST *è una sostituzione ciclica sulle mn lettere.*

Siano

$$S = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \cdot (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}) \dots (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}),$$

e

$$T = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) \cdot (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}) \dots (b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn})$$

le due sostituzioni permutabili date, essendo le lettere b_{ik} nient'altro che le a_{ik}, in altro ordine. Si ha $T^{-1}ST = S$; ma $T^{-1}ST$ si ottiene, sostituendo alle a_{ik} ordinatamente le lettere in cui la T porta le a_{ik} medesime; sicchè, dovendo gli n cicli di $T^{-1}ST$ coincidere con quelli di S, la T dovrà scambiare tra loro gli n cicli di S. Dimodochè se per esempio la T porta a_{11} in a_{21}, T dovrà portare le lettere del ciclo $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$ in quelle dell'altro $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m})$; precisamente porterà a_{11} in a_{21}, a_{12} in a_{22}, ecc., a_{1m} in a_{2m}. E così in generale.

Indichiamo per semplicità con $C_1, C_2, \dots, C_n$ gli n cicli di S; su di essi la T induce dunque una certa sostituzione, che dimostreremo essere ciclica e di periodo n. Cioè dimostreremo che la T deve portare la lettera a_{11} del primo ciclo C_1 in una lettera di un altro ciclo diverso dal primo; questa seconda lettera in un'altra di un terzo ciclo diverso dai primi due, ecc., fino a ritrovare, dopo n volte, la lettera a_{11}, dopo aver preso insomma una lettera da ognuna degli n cicli $C_1, C_2, \dots, C_n$. In altre parole, faremo vedere che si possono cambiare opportunamente gli indici delle a_{ik}, in modo che quel ciclo di T che contiene a_1, sia il seguente:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}).$$

Supponiamo, al contrario, che la T porti le lettere di C_1 in quelle di C_2, queste in quella di C_3, ecc., quelle di C_{r-1} in quelle di C_r, e queste ultime in quelle di C_1, e che sia $r < n$: vedremo che questo è un assurdo. Diciamo infatti $a'_{11}, a'_{12}, \dots a'_{1m}, a'_{21}, \dots, a'_{2m}, \dots, a'_{r1}\, a'_{rm}$ le lettere in cui la T porta rispettivamente $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, a_{r1}, \dots, a_{rm}$. Decomposta la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1m}, a'_{21}, \dots, a'_{2m}, \dots, a'_{r1}, \dots, a'_{rm} \\ a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{r1}, \dots, a_{rm} \end{pmatrix}$$

in cicli, tutti questi cicli devono contenere lo stesso numero u di lettere (chè tutti i cicli di T hanno u lettere); dev'essere quindi u un divisore di rm, e siccome n è primo con m, dev'essere u un divisore di r, il che è assurdo, essendo $r < n$, e $r \geq 1$. Così la nostra affermazione è dimostrata.

La sostituzione T porterà dunque le lettere di C_1 ad esempio in quelle di C_2, queste in quelle di C_3, ecc., quelle di C_{n-1} in quelle di C_n, e infine le lettere di C_n in quelle di C_1. Ad esempio T porterà a_{11} in a_{21}, a_{21} in a_{31}, ecc., a_{n-1} in a_n, e a_n in a_1, poichè allora il primo ciclo di T deve chiudersi, essendo tutti i cicli di T di n lettere. Così un ciclo di T sarà, poniamo dunque, il seguente

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1});$$

e allora gli altri cicli di T saranno

$$(a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{n2}); (a_{13}, a_{23}, \dots, a_{n3}); \dots; (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}),$$

poichè si è visto che T deve scambiare tra loro i varî cicli di S.

Adesso ci sarà facile dimostrare che anche il prodotto ST è una sostituzione regolare. Consideriamo infatti quel ciclo di ST che incomincia con a_{11}: la ST porta a_{11} in a_{22}, a_{22} in a_{33}, ecc., e se questo ciclo contiene k lettere, dopo k volte si ritroverà a_{11}. Allora consideriamo quel ciclo di ST che incomincia con a_{12}: la ST porta a_{12} in a_{23}, a_{23} in a_{34}, ecc., e quindi dopo k volte si ritroverà a_{12}, sicchè anche questo ciclo conterrà k lettere. Consideriamo quel ciclo di ST che comincia con a_{21}: la ST porta a_{21} in a_{32}, questa in a_{43}, ecc., talchè pure dopo k volte si ritroverà a_{21}, cioè anche questo ciclo conterrà k lettere. Insomma tutti i cicli di ST contengono uno stesso numero k di lettere. Ma siccome m e n sono primi tra loro, e S e T sono permutabili, il prodotto ST avrà il periodo mn, e quindi ogni ciclo di ST deve avere il periodo mn, vale a dire che ST è costituita da un unico ciclo di mn lettere, e il teorema è così finalmente dimostrato.

Posto $ST = C$, siccome le sostituzioni S e T sono permutabili col loro prodotto C, S e T saranno due potenze della ciclica C: posto $S = C^r$, e $T = C^s$, sarà $ST = C^{r+s} = C$, onde sarà: $r + s \equiv 1 \pmod{mn}$; e siccome $1 < r < m$, e $1 < s < m$, si ha: $2 < r + s < 2mn$, e quindi $r + s = mn + 1$. Il teorema enunciato può dunque completarsi, dicendo che S e T *sono potenze di una medesima sostituzione ciclica* C, *e che la somma dei due esponenti è* $= mn + 1$.

Matematica. — *Una nuova dimostrazione del teorema di Green.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

§ 1. — Lemma: la regola di L'Hospital per le funzioni di più variabili.

1. *Se* $a, b, \dots, c$ *sono numeri positivi e se le funzioni* $F(x, y, \dots, z)$, $G(x, y, \dots, z)$ *sono continue, con le loro derivate prime, nell'insieme* Ω *definito dalle diseguaglianze*:

$$x_0 < x \leq x_0 + a\ ,\ y_0 < y \leq y_0 + b\ \dots\ ,\ z_0 < z \leq z_0 + c\ ,$$

nel quale esse funzioni vengono esclusivamente considerate, se di più è sempre in Ω

$$G(x, y, \dots, z) \neq 0\ ,$$

$$G_x(x, y, \dots, z) > 0\ ,\ G_y(x, y, \dots, z) > 0\ ,\ G_z(x, y, \dots, z) > 0\ ,$$

mentre

$$F(x_0, y_0, \dots, z_0) = G(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0\ ,$$

allora dall'esistenza dei limiti

$$\lim_{M=M_0} \frac{F_x(x, y, \dots, z)}{G_x(x, y, \dots, z)}\ ,\ \lim_{M=M_0} \frac{F_y(x, y, \dots, z)}{G_y(x, y, \dots, z)}\ ,\ \dots\ ,\ \lim_{M=M_0} \frac{F_z(x, y, \dots, z)}{G_z(x, y, \dots, z)}\ ,$$

ove M e M_0 *designano i punti* $x, y, \dots, z$; $x_0, y_0 \dots, z_0$, *e dalla eguaglianza di questi limiti, discende l'esistenza del limite*

$$\lim_{M=M_0} \frac{F(x, y, \dots, z)}{G(x, y, \dots, z)}$$

e l'eguaglianza di questo ai precedenti.

Il teorema si dimostra subito. Supposto, invero, $x_0 = y_0 = \dots = z_0 = 0$, dalla eguaglianza

$$\frac{F(x, y, \dots, z)}{G(x, y, \dots, z)} = \frac{\Sigma x F_x(\theta x, \theta y, \dots, \theta z)}{\Sigma x G_x(\theta x, \theta y, \dots, \theta z)}\ ,\quad 0 < \theta < 1\ ,$$

segue che la frazione F/G è compresa fra la più grande e la più piccola delle frazioni

$$\frac{F_x(\theta x\,,\,\theta y\,,\,\ldots\,,\,\theta z)}{G_x(\theta x\,,\,\theta y\,,\,\ldots\,,\,\theta z)}\quad\ldots\ldots\quad\frac{F_z(\theta x\,,\,\theta y\,,\,\ldots\,,\,\theta z)}{G_z(\theta x\,,\,\theta y\,,\,\ldots\,,\,\theta z)}\,.$$

§ 2. — Una nuova dimostrazione del teorema di Green.

2. Questo teorema, che afferma le uguaglianze

$$(1)\qquad \iint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int_{(\Omega)}Q\,dy\quad;\quad\iint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial y}=-\int_{(\Omega)}P\,dx$$

è dimostrato in tutti i trattati di analisi sotto la condizione restrittiva che il contorno (Ω) del dominio regolare Ω sia incontrato da ogni parallela agli assi coordinati al massimo in un numero *finito* di punti [1]. Come primo esempio di applicazione del teorema di unicità per una funzione additiva di campo di derivata assegnata da me enunciato nella Nota *Sulle funzioni additive di campo*, ultimamente apparsa in questi Rendiconti [2], dò qui, del teorema di Green, una nuova dimostrazione elementare che lascia cadere quella restrizione e lo stabilisce in tutta la generalità desiderabile per le ordinarie questioni di Analisi. Dimostro cioè il teorema:

Se nel dominio chiuso e regolare Ω sono definite le funzioni P , Q , *continue con le loro derivate* Q_x , P_y , *sussistono le eguaglianze* (1).

3. Dimostriamo la prima delle (1) e dimostriamola dapprima nella ipotesi che il contorno (Ω) sia privo di punti singolari. Le due funzioni

$$S_1(\tau)=\iint_{\tau}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy\quad,\quad S_2(\tau)=\int_{(\tau)}Q\,dy\,,$$

sono funzioni additive delle porzioni regolari τ di Ω, di cui la prima ha per derivata, in ogni punto di Ω, la funzione $Q_x(x\,,\,y)$. basta dunque dimostrare che la funzione $S_2(\tau)$ ha per derivata, nel senso del n. 3 di (N), la stessa funzione.

[1] Tale condizione viene, in conseguenza di ciò, a figurare quasi sempre nelle analisi dei problemi dei valori al contorno per le equazioni alle derivate parziali, analisi che spesso si fondano appunto sulle formole (1).

Cino Poli nella Nota *Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. *49*, pag. 248), mediante una opportuna estensione della definizione di integrale curvilineo, osservò però, fin dal 1913, che il noto teorema di Fubini sugli integrali superficiali [Cfr., per esempio, Ch. J. de la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse infinitesimale* (2me édition), t. II, Chap. III] assicura la validità del teorema di Green, nel concetto di Lebesgue di integrale, per campi i cui contorni non devono soddisfare ad alcuna condizione.

[2] Citerò questa Nota con la notazione (N).

Sia P un punto interno di Ω ed in esso concepiamo portata l'origine delle coordinate. Il contorno di un rettangolo r, a lati paralleli agli assi coordinati, al quale il punto P è interno, segnerà sull'asse x due punti di ascisse $-\alpha$ e β, e sull'asse y due punti di ordinate $-\gamma$ e δ. Supposto r tutto interno ad Ω, si ha:

$$\frac{S_2(r)}{r} = \frac{1}{(\alpha+\beta)\gamma+\delta)}\left\{\int_{-\gamma}^{\delta} Q(\beta, y)\,dy - \int_{-\gamma}^{\delta} (-\alpha, y)\,dy\right\},$$

e quindi, evidentemente.

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0} \frac{S_2(r)}{r} = Q_x(0,0).$$

Sia P un punto del contorno (Ω). Distingueremo due casi.

1° caso. — La tangente in P non è parallela all'asse y. Si possono allora considerare i rettangoloidi r_y relativi al punto P. Sia $-y$ il raggio che penetra nell'interno di Ω e sia

$$y = \varphi(x) \quad , \quad \varphi(0) = 0 ,$$

l'equazione del pezzo di (Ω) contenuto nella semistriscia che determina r_y, $-\alpha$ e β le ascisse dei lati della semistriscia e $-\gamma$ l'ordinata della base. Si possono supporre α, β, γ già tanto piccoli che tutto l'indicato pezzo di (Ω) sia rappresentato dall'equazione $y = \varphi(x)$, con $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ finite e continue nel tratto $(-\alpha, \beta)$, In questo tratto sarà sempre

$$\varphi(x) \geq -\gamma .$$

Si ha:

$$S_2(r_y) = \int_{-\gamma}^{\varphi(\beta)} Q(\beta, y)\,dy - \int_{-\alpha}^{\beta} Q[x, \varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx - \int_{-\gamma}^{\varphi(-\alpha)} Q(-\alpha, y)\,dy \equiv F(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$r_y = \alpha\gamma + \gamma\beta + \int_{-\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx \equiv G(\alpha, \beta, \gamma).$$

Occorre studiare il limite

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{G(\alpha, \beta, \gamma)} .$$

È

$$F(0,0,0) = G(0,0,0) = 0 ,$$

$$F_\alpha = \int_{-\gamma}^{\varphi(-\alpha)} Q_x(-\alpha, y)\,dy \ , \ F_\beta = \int_{-\gamma}^{\varphi(\beta)} Q_x(\beta, y)\,dy \ , \ F_\gamma = Q(\beta, -\gamma) - Q(-\alpha, -\gamma),$$

$$G_\alpha = \gamma + \varphi(-\alpha) \ , \ G_\beta = \gamma + \varphi(\beta) \ , \ G_\gamma = \alpha + \beta .$$

Saranno soddisfatte le condizioni per l'applicabilità della regola del § 2, se sarà sempre $\varphi(-\alpha) > -\gamma$, $\varphi(\beta) > -\gamma$, ed avendosi, in tale ipotesi:

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F_\alpha}{G_\alpha} = \lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F_\beta}{G_\beta} = \lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F_\gamma}{G_\gamma} = Q_\alpha(0,0) .$$

risulta dimostrato, in tale ipotesi, che

$$\lim \frac{S_2(r_y)}{r_y} = Q_\alpha(0,0) .$$

Se poi è $\varphi(-\alpha) = -\gamma$, o $\varphi(\beta) = -\gamma$, o $\varphi(-\alpha) = \varphi(\beta) = -\gamma$, considerando che

$$\frac{F\{\alpha,\beta,-\varphi(-\alpha)\}}{G\{\alpha,\beta,-\varphi(-\alpha)\}} = \lim_{\gamma=-\varphi(-\alpha)+0} \frac{F(\alpha,\beta,\gamma)}{G(\alpha,\beta,\gamma)} ,$$

$$\frac{F\{\alpha,\beta,-\varphi(\beta)\}}{G\{\alpha,\beta,-\varphi(\beta)\}} = \lim_{\gamma=-\varphi(\beta)+0} \frac{F(\alpha,\beta,\gamma)}{G(\alpha,\beta,\gamma)} ,$$

riesce dimostrato in generale quanto si voleva.

2° Caso. — La tangente in P non è parallela all'asse x. Si possono allora considerare i rettangoloidi r_x relativi al punto P. Supposto che sia $+x$ l'asse che penetra nell'interno di Ω, si avrà:

$$S_2(r_x) = \int_{-\gamma}^{\delta} Q(\beta, y)\, dy - \int_{-\gamma}^{\delta} Q[\psi(y), y]\, dy \equiv F(\beta,\gamma,\delta) ,$$

$$r_x = \beta\gamma + \beta\delta - \int_{-\gamma}^{\delta} \psi(y)\, dy \equiv G(\beta,\gamma,\delta) ,$$

e, come per il caso precedente, si stabilirà che

$$\lim \frac{S_2(r_x)}{r_x} = Q_x(0,0) .$$

4. Dimostrato il teorema di Green nell'ipotesi che (Ω) è privo di punti singolari, lo si stabilisce nel caso generale in cui esso può presentarne un numero finito, colla solita operazione che consiste nel togliere ciascuna cuspide o punto angoloso di (Ω), mediante una curva a punti ordinarî raccordantesi ad (Ω) e interna ad un cerchio di raggio ρ e di centro nel punto singolare. Si ha così un dominio Ω_ρ per cui vale il teorema di Green, ed è:

$$\lim_{\rho=0} \Omega_\rho = \Omega , \quad \lim_{\rho=0} \iint_{\Omega_\rho} F\, dx\, dy = \iint_{\Omega} F\, dx\, dy , \quad \lim_{\rho=0} \int_{(\Omega_\rho} F\, dy = \int_{(\Omega} F dy .$$

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integro-differenziali.* Nota I di Attilio Vergerio, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

1. Abbiasi la seguente equazione integro-differenziale:

$$u(s,t) = h(s,t) + \lambda \int_0^1 K(s,r) \frac{\partial^p}{\partial t^p} h(r,t)\, dr, \tag{1}$$

dove $u(s,t)$ è una funzione nota, $h(s,t)$ la funzione incognita e p un numero finito intero e positivo.

Supporremo che $K(s,t)$ sia una funzione simmetrica delle due variabili s e t, entro il rettangolo $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$, e soddisfacente in esso alle condizioni dello Schmidt [1]; che tanto la $u(s,t)$ quanto le sue prime $2p$ derivate parziali rispetto a t siano finite e continue per $0 \leqq s \leqq 1$ e $t \geqq t_0$, essendo t_0 una costante qualunque; ed infine che esistano le prime $4p-2$ derivate parziali della $u(st)$ rispetto a t. Ci proponiamo di dare una formula risolutiva per l'equazione (1) [2].

2. Se si pone

$$g(s,t) = u(s,t) - h(s,t), \tag{2}$$

la (1) diventa

$$g(s,t) = \lambda \int_0^1 K(s,r) \left[\frac{\partial^p u(r,t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p g(r,t)}{\partial t^p} \right] dr; \tag{3}$$

e poichè quest'equazione deve ammettere soluzione, nell'ipotesi che la (1) ne ammetta, dovrà necessariamente essere [3]

$$g(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}(s,t), \tag{4}$$

per ogni valore di $t \geqq t_0$.

Se inoltre indichiamo con $H^{(\nu)}(s,t)$ la funzione caratteristica della $K(s,t)$ relativa alla costante Γ_ν [4], la quale, com'è noto, è una funzione finita con-

[1] *Entwicklung willkürlicher functionen* etc., Inaugural-Dissert., Göttingen, 1905.

[2] Di questo tipo di equazioni se n'è già occupato l'Amoroso. Egli però si è limitato al caso $p = 1$ (questi Rendiconti, 1912; due Note) e $p = 2$ (Atti della Società italiana pel progresso delle scienze, 6ª riunione, 1912, pag. 743). Qui invece intendiamo trattare il caso generale per p qualunque, purchè intero e positivo, e sotto condizioni alquanto più larghe per la $K(s,t)$.

[3] A. Vergerio, *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XLI, 1916; Cap. II, § 3, Teor. V).

[4] A. Vergerio, loc. cit., Cap. II, §§ 1 e 2.

tinua positiva e non identicamente nulla, ed integriamo ambo i membri della (3) tra i limiti 0 ed 1, dopo averli moltiplicati per $H^{(\nu)}(s,t)$, otterremo:

$$G^{(\nu)}(s,t) = \lambda \int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r)\left[\frac{\partial^p u(r,t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p g(r,t)}{\partial t^p}\right] dr =$$

$$= \lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} \int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r)\,[u(r,t) - g(r,t)]\,dr\,;$$

la quale equazione può anche scriversi

$$(5) \qquad G^{(\nu)}(s,t) = \lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} U_1^{(\nu)}(s,t) - \lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} G_1^{(\nu)}(s,t)\,,$$

quando si ponga

$$\int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r)\,u(r,t)\,dr = U_1^{(\nu)}(s,t)\ ;\ \int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r)\,g(r,t)\,dr = G_1^{(\nu)}(s,t).$$

Si moltiplichino ambo i membri della (5) per $H_1^{(\nu)}(st)$ e si integri tra 0 ed 1; si otterrà [1]:

$$\lambda G_1^{(\nu)}(s,t) = \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^p}{\partial t^p} U^{(\nu)}(s,t) - \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^p}{\partial t^p} G^{(\nu)}(s,t)\,;$$

da cui, derivando p volte rispetto a t,

$$\lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} G_1^{(\nu)}(s,t) = \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} U^{(\nu)}(s,t) - \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} G^{(\nu)}(s,t).$$

Sottraendo quest'eguaglianza dalla (5), membro a membro, si ottiene la seguente equazione differenziale lineare con secondo membro, cui deve soddisfare la funzione incognita $G^{(\nu)}(s,t)$:

$$(6) \qquad \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} G^{(\nu)}(s,t) - \frac{1}{\lambda^2 \Gamma_\nu} G^{(\nu)}(s,t) = \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} U^{(\nu)}(s,t) - \frac{1}{\lambda \Gamma_\nu} \frac{\partial^p}{\partial t^p} U_1^{(\nu)}(s,t).$$

3. Posto per brevità

$$\frac{1}{\sqrt[2p]{\lambda^2 \Gamma_\nu}} = \gamma_\nu\ ;\ \cos\frac{2n\pi}{2p} + i \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{2p} = \alpha_n\ ;$$

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} U^{(\nu)}(s,t) - \frac{1}{\lambda \Gamma_\nu} \frac{\partial^p}{\partial t^p} U_1^{(\nu)}(s,t) = M_\nu(s,t)\,,$$

l'integrale generale della (6) è dato dall'eguaglianza [2]:

$$G^{(\nu)}(s,t) = \sum_{n=0}^{2p-1} \left\{ C_n^{(\nu)}(s)\, e^{\alpha_n \gamma_\nu} + \frac{1}{2p\,\gamma_\nu^{2p-1}} \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\alpha_n \gamma_\nu (t-r)}}{\alpha_n^{2p-1}} M_\nu(s,r)\,dr \right\}$$

[1] Si ricordi che $\int_0^1 H_1^{(\nu)}(sr)\,H_1^{(\nu)}(rt)\,dr = \Gamma_\nu H^{(\nu)}(st)$ e che la $H_1^{(\nu)}(s,t)$ è una funzione continua; è lecita perciò l'inversione dei segni d'integrale e di derivata.

[2] De La Vallée Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, 2ª ed., Paris, Gauthier-Villars, pag. 246.

dove le $C_n^{(\nu)}(s)$ sono delle funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione, le quali, in grazia della (2), potranno essere determinate, in modo unico, quando si conoscano i valori assunti dalla funzione incognita $h(s,t)$ e dalle sue prime $2p-1$ derivate parziali rispetto a t, per $t=t_0$.

Per le (2) e (4) avremo così la formula risolutiva:

$$(7)\qquad h(s,t)=u(s,t)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{2p-1}\left\{c_{n,0}^{(\nu)}(s)\,e^{\alpha_n\gamma_\nu t}+\frac{1}{2p\,\gamma_\nu^{2p-1}\,\alpha_n^{2p-1}}\int_{t_0}^{t}e^{\alpha_n\gamma_\nu(t-r)}\,M_\nu(s,r)\,dr\right\};$$

dove le $c_{n,0}^{(\nu)}(s)$ sono le funzioni $c^{(\nu)}(s)$ precedentemente determinate nel modo suesposto.

Possiamo pertanto concludere che *se l'equazione* (1) *ammette come soluzione una funzione* $h(s,t)$ *finita e continua assieme alle sue prime* $2p$ *derivate parziali rispetto a* t *per* $0\leq s\leq 1$ *e* $t\geq t_0$, *tale da assumere essa e le sue prime* $2p-1$ *derivate parziali rispetto a* t *dei valori prefissati per* $t=t_0$, *detta soluzione sarà data dalla* (7); *e sarà inoltre unica.*

4. La (7) assume una forma molto più semplice nel caso in cui le costanti della $K(s,t)$ siano tutte eguali tra loro.

Si sa infatti [1] che allora che le funzioni caratteristiche $U^{(\nu)}(s,t)$ ed $U_1^{(\nu)}(s,t)$ sono identicamente nulle per ogni $\nu>1$, tali essendo le $H^{(\nu)}(s,t)$ ed $H_1^{(\nu)}(s,t)$; mentre invece per $\nu=1$ si ha

$$U_1^{(1)}(s,t)=u_1(s,t)\quad,\quad U^{(1)}(s,t)=\frac{u_2(s,t)}{\Gamma_1};$$

dove

$$u_1(s,t)=\int_0^1 K(s,r)\,u(r,t)\,dr\quad;\quad u_2(s,t)=\int_0^1 K_2(s,r)\,u(r,t)\,dr.$$

Con ciò la (7) diviene

$$h(s,t)=u(s,t)+$$
$$+\sum_{n=0}^{2p-1}\left\{c_{n,0}(s)\,e^{\gamma_1\alpha_n t}+\frac{1}{2p\gamma_1\,\alpha_n^{2p-1}}\int_{t_0}^{t}e^{\gamma_1\alpha_n(t-r)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{u_2(s,r)}{\Gamma_1}-\frac{1}{\lambda\Gamma_1}\frac{\partial^p}{\partial t^p}\,u_1(s,r)\right]dr\right\}.$$

In un'altra Nota daremo un'altra formula risolutiva sotto condizioni più generali per la $K(s\,t)$.

[1] Cfr. la mia Memoria citata, Cap. IV, § 2: caso particolare.

Chimica. — *Nuova sostanza esplosiva derivata dalla formaldeide* (1). Nota del dott. Annibale Moreschi, presentata dal Socio R. Nasini.

Se si fa agire l'acido cloridrico gassoso sopra una soluzione di aldeide formica del commercio (40 % circa) a lungo a ricadere e raffreddando, si ha assorbimento di acido cloridrico che si addiziona al corpo aldeidico secondo:

$$\begin{matrix} H_2 \\ \dot{C}=O \end{matrix} + HCl = \begin{matrix} CH^2 - OH \\ \dot{C}l \end{matrix}$$

si giunge cioè ad una sostanza contenente 53,38 % di cloro; all'analisi le determinazioni fatte dànno oscillazioni da 54 a 56 %. Se si protrae l'azione dell'acido cloridrico, si osserva un assorbimento continuo del gas e si ha la separazione di uno strato liquido pesante che deve risultare dall'azione eterificante dell'acido cloridrico sull'alcool clorurato:

$$\begin{matrix} CH^2 - OH \\ Cl \\ Cl \\ CH_2 - O\,H \end{matrix} + HCl = H_2O + HCl + \begin{matrix} CH^2Cl \\ O \\ CH^2Cl \end{matrix}$$

Il prodotto dovrebbe contenere 61,73 % di cloro; ne contiene all'analisi da 62 a 65 % e sembra che il maggior contenuto si spieghi con la presenza di acido cloridrico libero e disciolto.

Si è rivolta l'attenzione a questo corpo allo scopo di preparare il glicol etilenico.

Riservandomi di riferire sui prodotti di condensazione che si ottengono disalogenando il composto, espongo qui il risultato del suo comportamento all'azione del miscuglio nitrante comunemente adoperato per la trasformazione della glicerina in nitroglicerina.

Se si fanno pervenire lentamente, raffreddando a circa 5°C, il miscuglio tenuto in viva agitazione, 20 gr. del composto alogenato in 170 gr. di miscuglio della composizione seguente:

SO_4H_2	53.90
NO_3H	43.43
H_2O	2.67

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico della Fabbrica di esplosivi Bombrini, Parodi-Delfino, in Segni-Scalo.

avendo cura di proseguire l'agitazione, per un tempo pressochè eguale a quello impiegato per lasciar defluire il composto alogenato, sospendendo l'agitazione si ha separazione nello spazio di pochi minuti di un prodotto oleoso che galleggia sul miscuglio ed è pressochè incolore. Durante l'operazione si ha sviluppo di un gas pungente, contenente fosgene, acido cloridrico e probabilmente un acido ossigenato del cloro.

Separato il prodotto dal miscuglio, si raccoglie in acqua fredda dove precipita al fondo; si lava finchè nell'acqua di lavaggio non si riconosce più acido solforico; da 20 gr. di prodotto alogenato si hanno rendimenti, da numerose prove, di 23-24 gr. di prodotto nitrato, esente da alogeno.

Il prodotto è estremamente sensibile all'urto: si decompone con detonazione.

Seccato sopra solfato di sodio anidro, il suo peso specifico è d.^{t} 4° C = = 1.52206.

La determinazione dell'azoto al nitrometro, eseguita ripetutamente, porta a numeri che oscillano da 8,90 a 9 $^{0}/_{00}$.

La determinazione eseguita pure parecchie volte secondo Dumas sopra sostanza di diverse preparazioni, dà numeri che oscillano dal 18 al 18.20 $^{0}/_{0}$.

Ripetute combustioni per carbonio ed idrogeno, con ossido di rame (ripetute per la difficoltà di guidare la combustione) portano ai numeri seguenti:

$$C\ ^{0}/_{0} = 14{,}60$$
$$H\ \text{»} = 2{,}40$$

La determinazione della grandezza molecolare secondo il metodo crioscopico, solvente il benzolo ha dato:

$$P.M. = \frac{100\,pT}{l.\ c} \qquad T = 51$$

Per solvente	Sostanza sciolta	Δ	P.M.
Gr. 20.646	—	—	—
	0.3470	0°,59	145
	0.8031	1°,38	143
	1.0905	1°,87	144
Gr. 16.780	0.4210	0°,86	149

Complessivamente si possono riassumere i seguenti dati analitici:

Sostanza	gr. 0.1827	
CO_2	» 0.0999	$C\ ^{0}/_{0} = 14.90$
H_2O	» 0.0395	H » = 2.40
C	» 0.02724	N » = 18,11
H	» 0.00439	O » = 64,49

dai quali il composto risulterebbe $C_2H_4O_6N_2$ (peso molecolare 152) che contiene teoricamente:

C % = 15.78
H » = 2.63
N » = 18.42
O » = 63.17

Grammi 3.6 di prodotto si saponificano scaldandoli a ricadere con 25 cc. di una soluzione di potassa caustica al 15 %; si impiegano complessivamente grammi 2.53 di KOH; dalla teoria per due gruppi acidi NO_2 sono richiesti grammi 2.65.

Come è detto più sopra, il composto si può esprimere con $C_2H_4N_2O_6$, risponde cioè per composizione centesimale e per grandezza molecolare al dinitroglicol; ma sono peraltro ben diverse le proprietà fisiche e chimiche di quel prodotto. Il modo di formazione, il rendimento, il comportamento differente dei gruppi azotati delle due espressioni seguenti:

$$\begin{array}{l} CH_2 - ONO_2 \\ \diagup \\ O \\ \diagdown \\ CH_2 - ONO \end{array} \qquad \begin{array}{l} CH_2 - ONO_2 \\ \diagup \\ O \\ \diagdown \\ CH_2 - NO_2 \end{array}$$

fanno ritenere più probabile la seconda: rende improbabile la prima il fatto che la saponificazione porta ad acido formico e nitrometano.

La sostanza, forse per il suo spiccato carattere di etere ha un grandissimo potere solvente verso il nitrocotone, tantochè lo scioglie in misura elevata anche alla temperatura di 0° C.

Si è preparato dal prodotto una gelatina esplosiva contenente 7% di nitrocotone (N = 12.11 %), gelatina che è stata provata al Traultze in parallelo con gelatina allo stesso titolo di nitroglicerina; si è avuto:

Gr. 10 gelatina alla nitroglicerina		Gr. 10 gelatina X
Vol. iniz.	Vol. dopo esplos.	Vol. dopo esplosione
60 cc.	41) cc.	545 cc.
	435	560
	420	540

Il comportamento dell'aldeide formica descritto nella presente Nota ha suggerito di proseguire le indagini su altri corpi a funzione aldeidica, allo scopo di stabilire se l'introduzione del gruppo nitrico avviene con la stessa regolarità; è stata presa in considerazione l'aldeide acetica e si è osservato che se si conduce l'addizione di acido cloridrico lentamente ed a bassa temperatura, il prodotto alogenato che ne deriva è esso pure suscettibile di

sostituzione nel gruppo alogenico con un gruppo nitrico per l'azione del miscuglio nitrante.

Dalle determinazioni dell'acido nitrico nel miscuglio riguadagnato appare che la quantità rimasta è di poco inferiore a quella teorica, quando si dosi appena sia avvenuta la separazione; va invece diminuendo gradatamente con l'elevarsi della temperatura, probabilmente in seguito ad ossidazione più spinta dell'acido cloridrico. Le osservazioni esposte possono essere ragioni determinanti dello studio del fenomeno di sostituzione del gruppo alogenico col nitrogruppo.

Ritengo doveroso osservare che la nitrazione deve essere condotta nelle condizioni sopra esposte, perchè variando il rapporto tra sostanza da nitrare e miscuglio nitrante, allo scopo di avere un acido riguadagnato più povero in acido nitrico, si va contro una sicura esplosione a nitrazione compiuta.

Fisica. — *Oscillazioni luminose nelle nuove lampade ad incandescenza* [1]. Nota di Luigina Fabaro, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Era già noto che, alimentando una lampada ad incandescenza con correnti alternate, la luce emessa è lievemente pulsante a causa del carattere oscillatorio dell'energia che il filamento riceve e della non grandissima inerzia calorifica del filamento medesimo.

Il problema fu sottoposto a lunga indagine teorica e sperimentale dal prof. Corbino, il quale mise in evidenza le particolarità più caratteristiche del fenomeno, dimostrando che la temperatura del filamento oscilla di una quantità determinata intorno ad un valore medio, cui corrisponde la luminosità media, e tali oscillazioni hanno ampiezza e fase dipendenti in modo semplice dalla capacità termica del filamento, dalla energia media emessa e dalla sua derivata rispetto alla temperatura. In seguito a quelle ricerche, e misurando sperimentalmente le variazioni periodiche di resistenza del filamento si potè dedurre il calore specifico del metallo alla temperatura elevatissima del funzionamento normale della lampadina.

Furono in seguito fatte da altri misure fotometriche opportunamente dirette alla valutazione delle oscillazioni di intensità luminosa delle lampadine alimentate da correnti alternate. Si potè così stabilire che alla frequenza di 50 periodi una lampada media a filamento metallico varia di circa il 15 % nella sua intensità luminosa misurata in fasi diverse della corrente.

Nelle lampade dette *mezzo-watt*, caratterizzate da una temperatura più alta di regime del filamento e dalla presenza di un gas inerte destinato ad

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

impedire la volatilizzazione troppo rapida del filamento survoltato, sono notevolmente modificate le condizioni delle lampade ordinarie, e possono da ciò risultare mutamenti notevoli nelle particolarità delle oscillazioni luminose. Intervengono invero due circostanze che agiscono in senso opposto sulla ampiezza delle oscillazioni luminose: la presenza del gas e la più alta temperatura di regime tendono insieme ad elevare l'ampiezza delle oscillazioni, mentre la massa maggiore del filamento tende invece a ridurla. E poichè queste oscillazioni non sono di effetti trascurabili nella tecnica dell'illuminazione, mi è parso opportuno eseguire delle misure dirette a determinare l'ampiezza e la fase delle oscillazioni luminose di queste nuove lampade, il cui uso si va sempre più generalizzando anche per le piccole intensità.

* * *

Sull'asse di un motore sincrono a quattro poli si è montato un disco di alluminio provvisto di quattro fenditure radiali spostate di 90° l'una dall'altra. Si fa in modo che il disco stia in un piano verticale e sia disposto fra la lampadina da studiare e una cella fotoelettrica al potassio in atmosfera di argon secondo Elster e Geitel.

La luce emessa e intercettata dal disco, va a colpire la cella solo al passaggio rapido delle fessure praticate nel disco, che partecipa al movimento del motore. Questo e la lampada sono alimentati dalla stessa corrente alternata. La luce passa quattro volte per ogni giro ed, essendo il motore a quattro poli, una volta ad ogni mezzo periodo della corrente. Il filamento della lampada si proietta con un sistema di lenti sulla cella fotoelettrica, sulla quale si fa agire una forza elettromotrice continua a 100 Volta. Nel circuito della cella sono inseriti un galvanometro e una resistenza di 3000 Ohm.

Corrispondentemente ad ogni mezzo periodo della corrente si avranno impressioni istantanee successive sulla cella, che si rivelano in una deviazione galvanometrica permanente, dalla quale si può avere la misura della intensità luminosa media nella fase considerata.

Sia la curva sinusoidale della fig. 1 quella che rappresenta l'andamento della corrente alternata. L'intensità luminosa corrisponderà, p. es., ai punti A, A_1, A_2, A_3, spostati l'uno rispetto all'altro di $^1/_2$ periodo (essendovi nel disco quattro fenditure, come si è detto).

Spostando di un certo angolo la posizione delle fenditure sul disco o, ciò che fa lo stesso, rotando lo statore del motore in modo da riferirsi ad altri punti della curva, si può misurare l'intensità luminosa lungo tutta la curva. Dopo aver cercato la posizione in cui è massima la luminosità, si esegue, partendo da tale posizione, una serie di misure, spostando successivamente lo statore di 10° in 10°, riferendosi ad un cerchio graduato disposto sulla base del motore.

Se all'inizio degli spostamenti corrisponde il massimo di luce, a 45° di spostamento dello statore del motore, e quindi a 90° rispetto alla fase della forza elettromotrice, si ha il minimo, come era prevedibile.

Si sono dapprima eseguite le misure, adoperando una lampada *Philips*, *tipo* $^1/_2$ Watt, da 32 candele, che consuma 32 Watt. La curva tracciata in base a tali misure è di forma sinusoidale, spostata naturalmente tutta al disopra dell'asse delle ascisse.

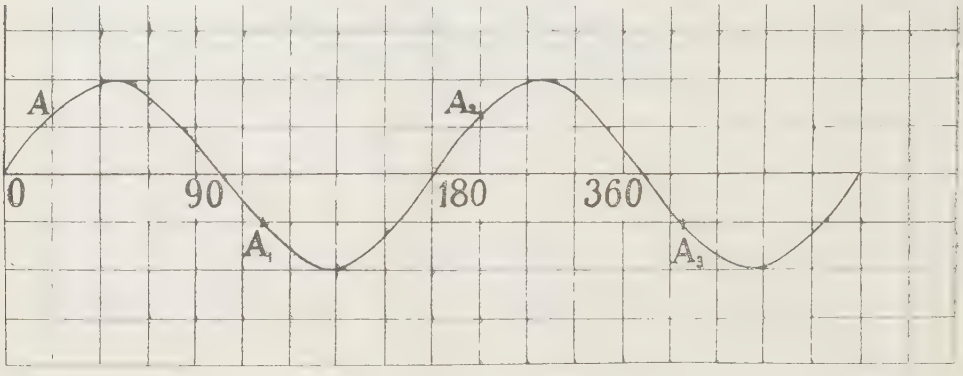

Fig. 1.

Per trovare lo spostamento di fase tra il massimo della luce e il massimo della forza elettromotrice che alimenta la lampada, si è disposto sull'asse del motore un collettore costituito da un cilindretto di materiale isolante, lungo due generatrici del quale, diametralmente opposte, sono fissate due sottili lamelle metalliche, comunicanti fra loro. Questo collettore, che ruota sincronicamente col disco provvisto di fenditure, viene a trovarsi fra due spazzole portate dalla parte fissa del motore e inserite nel circuito di un voltmetro collegato con la linea stradale. Rotando lo statore del motore finchè il voltmetro segna il massimo, si determina la corrispondente posizione dello statore stesso sul cerchio graduato. La differenza angolare fra questa posizione e quella a cui corrisponde il massimo della luminosità dà lo spostamento ricercato, in quanto che nel calettare il disco provvisto di fenditure si è avuta cura che la congiungente due fenditure diametralmente opposte fosse parallela alla congiungente le due lamelle del conduttore stesso. Lo sfasamento trovato per la lampada Philips da 32 candele è di circa 74°, misurati come spostamento di fase. A questa lampada si è poi sostituita una $^1/_2$ Watt da 200 candele, ripetendo la serie di misure dell'intensità luminosa. In questo tipo di lampada si hanno variazioni di luminosità del 21 %, molto meno pronunciate che nella precedente, dove le variazioni erano del 43 %. Lo sfasamento rispetto alla forza elettromotrice della corrente diventa di circa 90°. Si è provato poi con una lampada *Z*, tipo normale,

da 100 candele; in questo caso, in cui non si ha più, come prima, il filamento luminoso tutto disposto in un piano, non potendolo perciò proiettare tutto secondo una linea verticale, per evitare che le immagini dei diversi filamenti luminosi andassero successivamente a colpire la cella, con che si sarebbero fuse le impressioni luminose corrispondenti a fasi diverse, fu necessario limitare mediante uno schermo fisso provvisto di una fenditura la luce emanante da un solo filamento luminoso. Si sono trovate in questa lam-

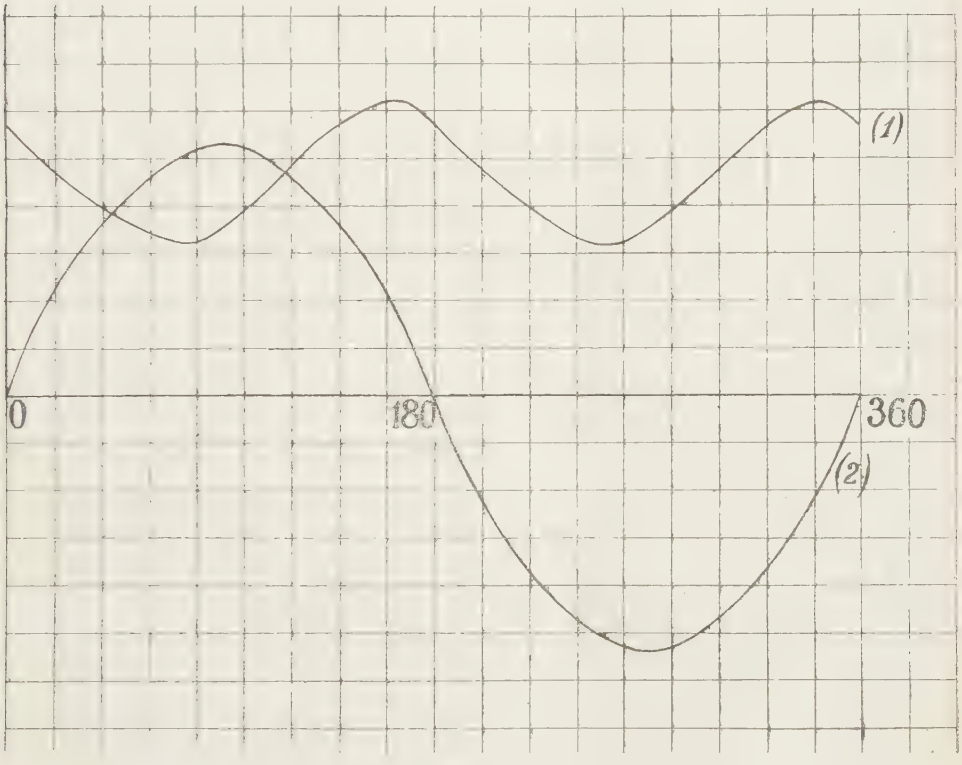

Fig. 2.

pada variazioni di luminosità del 23 %, all'incirca come nella $^1/_2$ Watt da 200 candele; e uno spostamento di fase rispetto alla forza elettromotrice di circa 86°.

* * *

Nel diagramma riportato nella fig. 2, la curva (1) rappresenta le oscillazioni di luminosità per la lampada Philips, tipo $^1/_2$ Watt. Sulle ascisse sono riportate le fasi della forza elettromotrice alternata, sulle ordinate le deviazioni galvanometriche che misurano l'intensità luminosa. La curva (2), il cui massimo ha un anticipo di 74° sul massimo della curva precedente, rappresenta la tensione della corrente.

Curve analoghe si ottennero con le altre lampade; ciascuna è caratterizzata dallo spostamento di fase del massimo e dall'ampiezza dell'oscillazione sopra riferite.

Che nella lampada da 200 candele $^1/_2$ *Watt* e nella *Z* normale da 100 candele si abbiano oscillazioni molto meno pronunziate che nella Philips da 32 candele, può spiegarsi col fatto che in esse la massa totale del filamento, perchè maggiore, risponde con meno prontezza alle pulsazioni della corrente.

Ciò viene anche confermato da misure eseguite con una lampada *Osram* $^1/_2$ *Watt* da 1000 candele, in cui si hanno variazioni luminose quasi inapprezzabili.

Zoologia. — *Il comportamento della sostanza cromatica durante la spermatogenesi oligopirenica di Paludina vivipara* Linn. [1]. Nota del dott. Cesare Artom, presentata dal Socio Battista Grassi.

Ho ripreso recentemente le mie osservazioni sulla spermatogenesi della *Paludina vivipara* rimaste interrotte in questi ultimi quattro anni, causa l'adempimento dei miei obblighi militari.

In parte su nuovi preparati, in parte su altri precedentemente allestiti e disegnati, ho rivolto la mia attenzione specialmente sui fenomeni nucleari che intervengono durante le fasi della spermatogenesi oligopirenica.

Tutto il processo descritto al riguardo dal Meves [2] consiste in definitiva in una vacuolizzazione dei cromosomi dei grandi spermatociti in cui, a differenza degli spermatociti normali, non è avvenuta la fase riduttiva. La vacuolizzazione si inizia durante la fase di *diaster* della prima divisione di maturazione, essa prosegue durante la seconda divisione, per modo che tutti i cromosomi in definitiva si disciolgono, eccetto che uno, il quale si ritroverà negli spermatidi sotto forma di nucleo in riposo, di aspetto vescicoloso, e di cui la sostanza cromatica costituerà l'apice dello spermatozoo vermiforme od oligopirenico.

Tra i varî metodi citologici adoperati per penetrare meglio nel significato della vacuolizzazione e della successiva soluzione della maggior parte dei cromosomi nel protoplasma dello spermatidio, il metodo di Giemsa (fissazione col sublimato acetico-colorazione coll'azzurro eosina di Giemsa) è

[1] Dall'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma diretta dal professore B. Grassi.

[2] *Ueber oligopyrene und apyrene Spermien und über ihre Entstehung nach Beobachtungen an Paludina und Pygaera.* Archiv. f. mikros. Anat. Bd. 61. 1903.

quello che mi ha dato i migliori risultati. Il metodo è applicabile tanto per gli strisci quanto per le sezioni (1).

Riserbandomi di illustrare meglio in seguito le mie osservazioni, mi limiterò per ora ad accennare solo ai principali risultati ottenuti:

Quando il grande spermatocito sta per entrare in divisione, i cromosomi presenti sono in numero normale (e cioè 14) anzichè in numero ridotto (7) come avviene negli spermatociti normali. I cromosomi talvolta sono visibilmente doppi ed ancora ben compatti: non tutti però assorbono in modo eguale la caratteristica colorazione rosso vinosa; verosimilmente i cromosomi che in tale stadio presentano una colorazione meno intensa, saranno i primi a vacuolizzarsi.

Del resto, come già avevo accennato in una Nota precedente (2) prima che si inizi il vero processo di vacuolizzazione, i fissatori a base osmica, seguìti dalla colorazione con Ematossilina ferrica, mettono molto bene in evidenza i limiti entro i quali si svolgerà il fenomeno della vacuolizzazione di ciascun cromosoma. Il cromosoma cioè quando sta per vacuolizzarsi, appare attorniato da una certa quantità di protoplasma e come isolato da tutto il resto del citoplasma; e quando il cromosoma appare ancora perfettamente compatto, risulta ben marcato un margine circolare che racchiude il cromosoma destinato a vacuolizzarsi insieme con una circostante massa di protoplasma. Susseguentemente si inizia il processo di vacuolizzazione; e col metodo Giemsa si riesce a mettere molto bene in evidenza che entro il vacuolo si formano dei piccoli granuli i quali conservano, per quanto meno accentuata, la colorazione caratteristica della cromatina. Anzi si può dire che durante il processo della vacuolizzazione si osserva tutta una gradazione di colorazione tra il rosso intenso rubino con cui sono colorati i cromosomi ancora compatti, e il rosa violaceo più o meno intenso con cui invece appaiono colorati i numerosi granuli di cromatina contenuti nel vacuolo. Non è il caso di accennare qui alle particolarità messe in evidenza durante le varie fasi della spermatogenesi atipica; basti accennare che gli spermatidi oligopirenici colorati col metodo Giemsa risultano costituiti in definitiva di una massa di protoplasma cosparsa di una grande quantità di granuli colorati in modo molto netto in rosa violaceo e che io ritengo granuli di una speciale sostanza cromatica derivata (attraverso il processo della soluzione) dalla cromatina dei cromosomi.

Come già ebbe ad osservare anche Meves, trovo poi negli spermatidi un unico cromosoma, il quale, entrato nella fase di riposo, assume l'aspetto

(1) Devo vivi ringraziamenti al prof. A. Splendore di questo Istituto per gli utili suggerimenti datimi al riguardo.

(2) *Sulla presenza e sull'evoluzione di cellule a nucleo doppio nella spermatogenesi di Paludina vivipara.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XXIII, serie 5ª, 2° semestre, fascicolo 2°. Roma 1914.

di un nucleo vescicoloso colorato col Giemsa in rosa violaceo. Mentre in tale stadio il nucleo vescicoloso occupa il centro della cellula, in uno stadio susseguente, in cui lo spermatidio incomincia ad assumere una forma piuttosto allungata, il nucleo ne ha raggiunta la periferia per venire successivamente a formare la testa dello spermatozoo. Anche in tale stadio il protoplasma dello spermatidio è cosparso di una grande quantità di granuli che conservano tutta la colorabilità e tutto l'aspetto di granuli di sostanza cromatica. Infine poi nello spermatozoo definitivo sono presenti gli stessi granuli sopradescritti, i quali sono abbondantemente diffusi nella massa di protoplasma che, come è noto, circonda a guisa di guaina il fascio dei filamenti caratteristici degli spermatozoi oligopirenici.

Riassumendo: col metodo Giemsa veramente da raccomandarsi anche per lo studio dei cromosomi durante qualsiasi fase della spermatogenesi, risulta che, sia lo spermatidio, sia lo spermatozoo oligopirenico contengono cosparsi nel protoplasma numerosissimi piccoli granuli i quali hanno tutta l'apparenza di essere granuli di sostanza cromatica e che con tutta probabilità ripetono la loro origine dalla cromatina discioltasi durante il ben noto processo di vacuolizzazione di ogni singolo cromosoma. Certo si è che ciascun cromosoma durante la vacuolizzazione e prima della sua soluzione totale, attraversa una fase in cui appare frammentato in numerosi piccoli granuli identici per apparenza e per colorabilità ai granuli che, come ho detto, si ritrovano abbondantissimi nel protoplasma sia degli spermatidi sia degli spermatozoi oligopirenici. Perciò in definitiva il cosidetto spermatozoo oligopirenico conterrebbe apparentemente la sostanza cromatica di un solo cromosoma organizzata a formarne la testa, ma in realtà conterrebbe altresì sparsa in tutto il protoplasma sotto forma di piccoli granuli la sostanza cromatica derivante dagli altri cromosomi che noi vediamo vacuolizzarsi e poi sciogliersi durante la prima e la seconda divisione di maturazione dello spermatocito atipico.

Quanto è stato per ora sommariamente descritto e che deve evidentemente essere ulteriormente approfondito, può forse essere raffrontato con quanto avviene secondo Hertwig nell'*Actinosphaerium Eichorni*(1). Anche qui in certi processi specialmente patologici dovuti alla mancanza di nutrimento nelle culture del protozoo, avviene che i nuclei si dissolvono in tanti piccoli granuli (cromidi): l'*Actinosphaerium* si è in definitiva trasformato in una vera cellula cromidiale dotata ancora di un certo grado di vitalità. Può veramente valere tale confronto tra l'*Actinosphaerium*, e lo spermatidio e lo spermatozoo oligopirenico di Paludina? Le ulteriori ricerche confermeranno od escluderanno questa ipotesi; ciò che mi pare di poter affermare si è che tutta la formazione degli spermi aberranti trova il suo inizio nell'alterazione della

(1) Doflein. Lehrbuch der Protozonkunde, Jena, Fischer 1916, pag. 257.

sostanza cromatica. Alterazione che incomincia nello spermatocito nella fase di accrescimento, tanto da rimanere impedita la copulazione dei cromosomi omologhi (mancata riduzione nel numero dei cromosomi) e che culmina poi successivamente nel fenomeno della vacuolizzazione di ogni singolo cromosoma. Le ragioni di tale alterazione e di tutti i fenomeni che ne conseguono non sono note: propendo però per credere che, così come avviene nella formazione dei cromidi nel caso dell'*Actinosphaerium*, essa possa essere dovuta a stimoli e a cause occasionali. Se così è, il misterioso problema della spermatogenesi aberrante dei molluschi Prosobranchi potrà essere rischiarato tentando, col metodo delle culture artificiali del tessuto germinativo, di offrire ai varî elementi cellulari della serie spermatica, un ambiente per il loro sviluppo, completamente diverso da quello usuale.

Zoologia. — *La riproduzione allo stato coloniale, studiata in un flagellato* (*Antophysa vegetans*). Nota di Paolo Enriques, presentata dal Socio B. Grassi (1).

Introduzione. Negli animali che posseggono varie forme di riproduzione (agama oppure partenogenetica — o anfigonica) si può generalmente conservare la specie con la sola riproduzione agamica o partenogenetica (Afidi, Infusorî); per varie specie d'Infusorî conosciamo ormai così bene tutte le condizioni determinanti il fenomeno sessuale, che possiamo provocarlo a volontà.

La scissione allo stato coloniale è nota o supposta per varî organismi, soprattutto Protozoi; ma nulla si sa riguardo alle condizioni in cui essa si produce, e tanto meno se essa possa conservare indefinitamente la specie, all'infuori di altre forme riproduttive. Nei libri troviamo descritti questi fenomeni dicendo che, tra le scissioni delle colonie, « ogni tanto » avviene la separazione degl'individui; che « ad un certo punto » essi si separano, od appare la riproduzione sessuata — tutte espressioni vaghe che cercano invano di nascondere la nostra completa ignoranza sulle condizioni determinanti i fenomeni stessi. Non sappiamo affatto quali condizioni determinino la scissione della colonia a preferenza di altre forme di riproduzione agamica o della riproduzione sessuata.

Ho studiato questo problema nell'*Antophysa vegetans*, flagellato d'acqua dolce che generalmente si trova allo stato coloniale, e qui riferisco i resultati ottenuti. L'ho studiato inoltre nei Radiolarî coloniali, insieme con altre questioni, e ne parlerò in altro lavoro più esteso.

Metodo d'allevamento. Ho allevato l'*Antophysa vegetans* collo stesso metodo col quale si allevano gl'Infusorî, isolando un individuo e ponendolo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto zoologico di Sassari.

in un ambiente favorevole alla sua riproduzione. L'individuo era, in questo caso, una colonia natante, libera; tale isolamento corrisponde a prendere un solo individuo flagellato, perchè la colonia d'Antofisa deriva, per quanto si sa, da scissione di un Flagellato solitario, non da riunione di più Flagellati prima distinti.

Come liquido culturale ho adoprato il decotto di fieno in acqua potabile, oppure acqua stagnante dove si trova l'*Antophysa*, bollita, filtrata, e poi bollita di nuovo, adoperata fresca, dopo la seconda bollitura. In ambedue questi liquidi l'Antofisa vive bene, mangiando i Batterî che vi si sviluppano.

Da una prima cultura fatta per isolamento, ho derivato le altre col trasporto di poche gocce piene di Antofise, nel liquido che non ne contiene.

Le culture furono tenute, durante gli esperimenti, in un termostato a 23-24°.

Diversi aspetti dell'Antophysa. Le forme che si presentano nelle culture più o meno vecchie, in condizioni poco precisate, sono le seguenti:

Predomina la forma coloniale, con due aspetti ben distinti: colonia libera e colonia fissa. La colonia libera consta di molti individui flagellati, disposti press'a poco a morula; si muove irregolarmente, rotando, e procedendo con direzione incerta.

La colonia fissa ha la medesima forma generale, ma è attaccata ad un peduncolo. Questo non è un organo, bensì una secrezione, la quale, nell'acqua in cui si versa, forma un filamento giallastro, lungo molte volte più del corpo. Quando la colonia è fissa, non è isolata; questo peduncolo di secrezione è ramificato, ed in cima ai rami si trovano altrettante colonie moruliformi. La ramificazione deriva dal modo col quale l'Antofisa cresce: dividendosi la colonia fissa, ancora fornita di breve peduncolo, in due colonie figlie, queste rimangono attaccate al peduncolo vecchio, mediante due rami che crescono a partire dal punto di biforcazione. Questo fatto si ripete più volte, e di qui proviene l'aspetto ramoso, multiplo, che hanno le colonie fisse, o, per meglio dire, i loro peduncoli.

Tale aspetto è quello più generalmente conosciuto per questa specie; ad esso si deve anche il nome di « vegetante ».

Oltre alle colonie, si trovano individui liberi; ed anche colonie in formazione, composte di due o pochissimi individui.

Inoltre si possono trovare individui incistidati (sempre individui singoli, non esistono cisti di colonie).

Modo per avere una cultura di sole colonie libere. È di una semplicità grandissima. Basta mantenere la cultura al massimo di alimentazione.

Per avere simili culture « al massimo », d'Infusorî, ho suggerito, altra volta, di gettar via *ogni giorno* la massima parte della cultura, sostituendola con liquido alimentare fresco. Questo sistema non è sufficiente con l'Antofisa, dotata di una velocità riproduttiva molto maggiore. Bisogna qui tra-

sportare poche gocce di una ricca cultura, in un vaso contenente liquido nutritizio fresco.

Da questo vaso il giorno dopo, o, se lo sviluppo è scarso, dopo 2 giorni, si tolgono di nuovo pochissime gocce, per portarle in un recipiente con liquido fresco; e così di seguito. Alla temperatura di 24° l'operazione va fatta ogni giorno, quando le gocce sono 5-10, il vaso è un cristallizzatore di circa 10 cm. di diametro, e la cultura di partenza è molto ricca di Antofise.

In questo allevamento, con culture sempre rinnovate, si può andare avanti per settimane e mesi, senza mai vedere nel liquido un Antofisa fissata col suo peduncolo di secrezione; e trovando solo come fatto eccezionale, dopo attenta e minuziosa ricerca, qualche rarissimo individuo libero.

Si conclude che la scissione della colonia libera è determinata dalle migliori condizioni d'ambiente (temperatura e nutrizione).

Modo per avere le colonie fisse. Interrompendo in una cultura il rinnovamento del liquido nutritizio la cultura stessa muta rapidamente aspetto; un mutamento profondo si osserva talora in un paio di giorni.

Le colonie si fissano e secernono il loro peduncolo; continuano tuttavia a dividersi nella condizione peduncolata, come dimostra la multipla ramosità dei peduncoli. In generale il numero degl'individui riuniti a morula è maggiore nella colonia natante che in quella fissata.

Nel medesimo tempo si trovano nella cultura individui liberi (non coloniali), oppure riuniti in piccolo numero in colonie libere.

Le cause determinanti questa modificazione della cultura possono essere di vario genere, e ciò ho indagato con apposito esperimento. Può darsi che l'elemento causale sia la diminuzione di cibo, quando le Antofise brulicano nel liquido in quantità colossale. Può darsi invece che il liquido della cultura di Antofise agisca su di esse in quanto è invecchiato, stando due o tre giorni nel termostato, e si è troppo arricchito di Batterî oppure dei loro prodotti tossici.

Per risolvere il dubbio, ho posto nel termostato un vaso di liquido nutritizio fresco, e l'ho lasciato invecchiare tre giorni, senza Antofise; dopo ciò vi ho trasportato qualche goccia della cultura al massimo, cioè colonie tutte libere. Come immediato resultato di questa cultura, non si osservano notevoli differenze da quelle preparate con liquido fresco; le Antofise si moltiplicano in maniera enorme, allo stato di colonia libera, e soltanto dopo questa moltiplicazione, ossia dopo due o tre giorni, cominciano a formare il peduncolo.

Non si può dunque ammettere che il liquido culturale provochi la formazione del peduncolo, quando è invecchiato due o tre giorni nel termostato.

Al contrario, si osserva la formazione del peduncolo in ambienti poveri di alimento; così per esempio in acque naturali poco batteriche.

La fissazione è perciò dovuta alla diminuzione di cibo.

Modo per avere gl' individui singoli, liberi. Dopo la formazione dei peduncoli, si può, secondo le condizioni, ottenere un resultato diverso. Prendendo alcune gocce di una tale cultura e ponendole in un vaso con liquido nutritizio fresco, si produce la solita cultura colle colonie libere; le colonie peduncolate si distaccano dai peduncoli e riprendono la loro moltiplicazione libera ed intensa.

Lasciando invece a sè la cultura a colonie peduncolate, anche questo stadio viene oltrepassato; nei giorni successivi si vedono rami abbandonati dai Flagellati; ma allo stato libero non si trovano colonie, bensì individui singoli, o appena riuniti in due, in tre, in pochi.

Questa condizione è assai durevole, ma poi la cultura non presenta più forme in vita attiva, essendosi le Antofise incistidate

Sui fenomeni sessuali che eventualmente si osservino prima, durante o dopo l'incistidamento, non ho fatto ricerche, essendo diverso lo scopo che mi ero prefisso.

Conclusioni. Insomma, l'*Antophysa vegetans*, questo Flagellato coloniale, presenta i suoi varî aspetti in relazione colle condizioni d'ambiente. Colonie libere che si riproducono attivamente per scissione sono conseguenza dell'alimentazione al massimo; una prima diminuzione d'alimento provoca il fissarsi delle colonie, colla produzione della secrezione peduncolare. Una diminuzione più intensa e prolungata provoca lo sciogliersi delle colonie (ormai fissate), in Flagellati singoli, liberi; essi s'incistidano quando il cibo è esaurito.

La scissione allo stato coloniale libero è dunque, nella specie studiata, quella forma riproduttiva che corrisponde alle ottime condizioni d'ambiente — proprio come la scissione dell'individuo negl' Infusorî non coloniali. Gli altri fatti insorgono pel peggioramento di queste condizioni.

Non possiamo estendere senz'altro questi resultati a tutte le specie coloniali, di Protozoi! Può essere che molti, o tutti, i Flagellati coloniali si comportino in questo modo. Certo i Radiolarî coloniali presentano un comportamento del tutto diverso, come mostreremo in altra occasione.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

1. Principi P. *La geologia dell'Umbria centrale.* Pres. dal Socio A. Issel.

2. Segrè A. *Di una moneta imperiale circolante in Egitto da Claudio II a Costantino.* Pres. dal Socio A. Loria.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il triste annuncio della perdita fatta dall'Accademia nella persona del suo Corrispondente prof. Romeo Fusari, della Università di Torino, mancato ai vivi il giorno 29 del mese scorso; faceva parte il defunto dell'Accademia, per la *Zoologia* e *Morfologia*, sino dal 13 luglio 1902.

Dà poscia comunicazione di una lettera colla quale il prof. Leone Fredericq ringrazia l'Accademia per la sua nomina a Socio straniero; e il Socio Fano ricorda i meriti patriottici dell'illustre scienziato belga, che per il suo costante rifiuto ad insegnare nell'Università istituita dai tedeschi a Liegi, sopportò fiere persecuzioni e fu condannato alla deportazione.

Il Socio E. Millosevich commemora il Socio straniero nella sezione d'astronomia Edoardo Carlo Pickering.

L'ardore e la perseveranza nel campo della fotometria, della fotografia celeste e della spettroscopia stellare animarono Edoardo Carlo Pickering fino agli ultimi giorni della sua vita, mentre poi ebbe la fortuna di trovarsi in un ambiente fecondo che la sua fede nella scienza rese fruttifero di mezzi, così che la produzione dell'Osservatorio di Cambridge Mass., detto Harvard astronomical Observatory, del quale era direttore fino dal 1876, raggiunse un successo, che, sotto il punto di vista astro-fisico, lo colloca fra i primissimi del mondo.

Il nostro illustre collega era nato a Boston il 19 luglio 1846, e morì a Cambridge Mass. il 3 febbraio 1919 dopo brevissima malattia di petto.

Laureatosi in Fisica nell'Harvard University, nel 1867 divenne professore di Fisica nell'Istituto tecnologico del Massachusset. Due anni dopo inaugurò il laboratorio Fisico, e fece conoscere un suo apparato per la trasmissione elettrica del suono. Benchè i suoi studî fossero alquanto lontani dall'astronomia, il suo talento e le sue qualità personali lo designarono a successore di Winlock nella direzione d'un Osservatorio che, per opera specialmente di Guglielmo Bond e del figlio Giorgio, aveva acquistato una grande riputazione. L'undicesimo volume degli Annali è il primo uscito per le cure di Pickering, mentre l'ultimo incoato porta il numero 84, tanta fu la produzione scientifica d'una coorte di lavoratori nell'indirizzo specialmente astro-fisico, sorretti dalla fede e dall'energia del nostro collega, il quale ben giustamente pensava che se l'astro-fisica può sperare di veder lume sostanziale nei grandi problemi cosmici, deve raccogliere immensi materiali di fotometria, di fotografia celeste e di fotospettroscopia del cielo; debbono gli Osservatorî mutarsi in Laboratorî astronomici, e accanto alle biblioteche vi debbono essere fotografiteche che i posteri certamente consulteranno. Il nostro collega non solo tutto questo ben pensava, ma in ricchi Americani inoculava

il suo pensiero; e questi, in grosso numero, gli diedero contributi che dovrebbero insegnare molte cose a coloro che sono favoriti dalla fortuna. In questo momento non mi vengono in mente che due mecenati italiani in favore dell'astronomia nell'ultimo trentennio, il banchiere Enrico Santoro e il nostro illustre collega Vincenzo Cerulli; ma può darsi che ve ne siano altri che non ricordo, pur non avendo dimenticato munificenze di data antica e che ancor oggi beneficano.

Con un suo fotometro Pickering determinò lo splendore dei satelliti di Giove e d'Urano, del satellite di Nettuno e dei due satelliti di Marte. Nei magnifici Cataloghi di *grandezze* di stelle e di variabili (Harvard Photometry-Photometric Durchmusterung-Revised Harvard Photometry) vi è, insieme all'opera di numerosi osservatori, il personale suo lavoro di circa 1.400.000 misure fotometriche; per opera dell'Osservatorio di Cambridge Mass. e prima che le scoperte chimiche permettessero il trionfo della fotografia celeste, la scienza ebbe notizia dello splendore di quasi tutte le stelle fino alla grandezza 7 ½, visibili dall'orizzonte della stazione.

È nel 1886 che Pickering espose all'Accademia Americana un piano di lavoro astro-fotografico per mezzo del quale, in un anno, avendo due stazioni, una nell'emisfero boreale, l'altra nell'australe, avrebbesi potuto avere una Carta completa di tutto il cielo.

Ed è ancora in quel tempo che iniziasi a Cambridge Mass. lo studio spettroscopico con procedimento rapido, collocando il prisma davanti all'oggettivo; una scoperta, che ebbe immense conseguenze, fu quella che appunto lo stesso Pickering faceva della prima binaria spettroscopica, una binaria che non sarebbe mai stata sospettata usando i metodi comuni e che fu rivelata dallo spettroscopio mercè il principio Dopler-Fizeau. È ζ Ursae maioris, quella di mezzo della coda; è Mizar, quella che ha assai vicina Alcor, dagli Arabi detta Saidak (provino), perchè essendo sempre bassa quella costellazione nell'Arabia, la separazione delle due stelle era prova di vista acuta, mentre nel nostro cielo la separazione è facilissima, nè prova affatto un'acutezza visiva.

L'entusiasmo di Pickering, trasfuso ai numerosi suoi collaboratori, diffondesi fra concittadini ricchi ed illuminati, e, ad onorare il marito defunto, che aveva per primo fatta la fotografia delle righe nello spettro d'una stella, la signora Draper creò la fondazione omonima in denaro e strumenti, e poi subito dopo sopravvenne il dono Boyden in dollari 230000 per osservazioni astronomiche in stazioni elevate, donde la possibilità della creazione dell'Osservatorio equinoziale ad Arequipa nel Perù e col dono di Miss Caterina Bruce, potè essere inviato colà il telescopio di 24 pollici consacrato allo studio delle stelle australi.

Con tanti sussidii, con tanti mezzi, con tanto personale e tanta energia non può destar meraviglia se le scoperte si successero alle scoperte, come ad

es. le righe lucide negli spettri delle variabili a lungo periodo, le prime binarie spettroscopiche, le nebule gasose e le stelle così dette « nuove ».

L'opera più insigne uscita sotto l'impulso di Pickering è il Catalogo che classifica gli spettri di circa 200000 stelle, tutto il cielo preso in esame a Cambridge Mass. e ad Arequipa. L'applicazione dei diversi processi di ricerche, processi fotografici e spettro-fotografici, permise la scoperta di sopra 3400 variabili su le 5000 circa che si conoscono.

Destano meraviglia ed ammirazione i tesori in fotografia stellare raccolti in lastre e depositati ordinatamente come i libri d'una biblioteca, così che se avvenga, come è occorso di già molte volte di consultare oggi il cielo di ieri, l'Osservatorio di Cambridge Mass. è quello che dà e darà risposte e scioglierà problemi.

Quando Eros fu trovato fotograficamente da Witt a Berlino nel 1898, le lastre dell'Harvard College Observatory ce lo indicarono e nell'opposizione del 1896 e meglio ancora in quella del 1894, l'astro essendo allora vicinissimo alla terra; se bruscamente appare una stella « nuova » se ne può trovar tracce o cavar conchiusioni dall'esame fotografico nella teca di Cambridge Mass.

La magnifica produzione in astro-fisica e fotografia celeste mette quasi in seconda linea l'attività dell'Osservatorio in astronomia di posizione, benchè è doveroso far cenno della riduzione a catalogo delle vecchie zone di Harvard College e dei due cataloghi stellari di zone, una boreale, l'altra australe, secondo il ben noto programma della Società astronomica tedesca.

Un personale numerosissimo, non solo maschile, ma anche femminile, fu iniziato a misure e a consultazioni nel laboratorio fotografico, nonchè a riduzioni di grandi serie d'osservazioni aerologiche, perchè anche per ricerche meteorologiche trovò Pickering munifiche offerte. Il far concorrere al lavoro scientifico tanta gioventù è fra i titoli caratteristici d'uno spirito nobilmente democratico e veramente innamorato della scienza.

Le personali sue qualità, il sapere e i grandi mezzi di cui disponeva gli crearono una grande popolarità, lo posero in relazione con tutti gli Osservatorî della terra, gli procurarono alte onorificenze accademiche e gli permisero una munificente diffusione di notizie per mezzo di bollettini, di circolari e di telegrammi, oltre l'invio dei celebri Annali a tutti gli Istituti scientifici della terra.

Era Pickering uno spirito geniale, che conservava un'anima giovane anche in vecchia età; amava conoscere i colleghi, e quattro volte venne in Europa: la prima nel 1870 nell'occasione dell'eclisse totale del 22 dicembre, l'ultima quando recossi a Bonn alla Conferenza solare un anno prima della terribile guerra.

Dice una sua biografa, Annie Cannon, che quest'insigne astro-fisico s'entusiasmava per la musica. Nell'armonia del cosmos è facile intendere il vincolo di Euterpe con Urania.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste un opuscolo del Socio SILVESTRI, intitolato: *Il Ceroplasta cinese degli agrumi*; i volumi VI e VII delle: *Obras sobre Mathematica* del dott. GOMES TEIXEIRA; e il volume: *A century of Scienee in America*, il quale appartiene ad una serie di pubblicazioni (questa è la 14ª) fatte sul fondo SILLIMAN alla Yale University.

COMUNICAZIONI

Al termine della seduta il Socio VOLTERRA informa la Classe di quanto venne proposto dalla « Royal Society » riguardo agli aggruppamenti delle scienze presso il Comitato interalleato per la organizzazione scientifica. Annuncia poi che la Conferenza internazionale per detta organizzazione, si adunerà a Bruxelles il 16 luglio venturo, e che il Comitato esecutivo terrà una seduta il 20 maggio a Parigi.

Il PRESIDENTE presenta un piego suggellato, inviato dal sig. GIOVANNI CUTUGNO perchè sia conservato negli Archivi accademici.

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, l'Accademia procedette alle elezioni di Soci e di Corrispondenti. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Soci nazionali:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: PASCAL ERNESTO; per la *Meccanica*: ALMANSI EMILIO.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: CORBINO ORSO MARIO.

Nella Categoria III, per la *Geologia* e *Paleontologia*: ISSEL ARTURO.

Nella Categoria IV, per la *Zoologia* e *Morfologia*: SILVESTRI FILIPPO.

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: FANO GINO.

Nella Categoria II, per la *Chimica*: PELLIZZARI GUIDO.

Nella Categoria III, per la *Geologia* e *Paleontologia*: DAL PIAZ GIORGIO.

Furono eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la *Geografia mat.* e *fisica*: Omori F., Shaw William Napier.

Nella Categoria III, per la *Geologia* e *Paleont.*: Washington S. H.

Nella Categoria IV, per la *Botanica*: Massart Jean; per l'*Agronomia*: Marchal Paul.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con Circolare del 18 marzo 1919; le elezioni dei Soci nazionali e stranieri furono sottoposte all'approvazione Sovrana.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 aprile 1919.

Caterini F. — Sopra alcune nuove forme di Koninckinidi, del Lias medio dell'Appennino centrale (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXXII, pp. 1-16). Pisa, 1919. 8°.

Caterini F. — Sulla *balaena montalianis* Cap. (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali; processi verbali, vol. XXVII). Pisa, 1918. 8°, fol.

Cavasino A. — Velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto di Calitri (Avellino) del 7 giugno 1910 (Estr. dal « Bollettino della Società sismologica italiana », vol. XXI, pp. 1-43). Modena, 1918. 8°.

Gorini C. — Per la conservazione dei foraggi con fermenti selezionati (Estr. da « Le Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LI, pp. 199-213). Modena, 1919. 8°.

Gomes Teixeira F. — Obras sobre mathematica; vol. VI-VII. Coimbra, 1912-1915. 4°, pp. 1-542, 1-424.

Mascart J. M. — Deux grands hivers consécutifs (Extrait du « Compte rendu de l'Académie d'agriculture »). Paris, 1918. 8°, pp. 1-6.

Mascart J. — Observation d'un mouvement cyclonique dans les hautes régions de l'atmosphère. Lyon, 1918 8°, pp. 1-6.

Salisbury Dana E. — A century of Science in America. New Haven, 1918 8°, pp. 1-458.

Silvestri F. — Il Ceroplaste (o cocciniglia) cinese degli agrumi. Portici, 1919 8°, pp. 1-15.

Vallauri G. — Sul funzionamento intorno al mezzo sincronismo della macchina polifase a induzione con rotore monofase (Estr. dal giornale « l'Elettrotecnica »). Milano, 1919. 4°, pp. 1-11.